

# Agrégation des préférences

M2 IIIEE

Julien Ah-Pine (julien.ah-pine@eric.univ-lyon2.fr)

Université Lyon 2 - ICOM

2014-2015

## Déroulement du cours

- 7 séances CM et/ou TD de 3h
- 1 examen terminal

## Motivations

### • Pourquoi l'agrégation des préférences ?

- Beaucoup de problèmes font intervenir des données de type ordres, classements, scores de jugement, ... que les statistiques par exemple ne traitent pas de manière privilégiée.
- Parmi ces problèmes, nombreux sont ceux où il s'agit de déterminer un consensus au sein de plusieurs relations de préférence. On parle alors d'agrégation de préférences.
- Ces problèmes se rencontrent dans de nombreuses disciplines à la fois sur des aspects théoriques et pratiques : théorie des votes et choix social, aide à la décision multicritère, fusion d'information, recherche d'information, intelligence artificielle (systèmes multi-agent, méthodes ensemblistes, ...), ...
- Les données relationnelles de préférence sont riches et permettent d'exprimer et de modéliser beaucoup de comportements et de problèmes de décision.

## Contenu du cours

- Représentation des préférences
- Opérateurs d'agrégation
- Méthodes de vote et théorie du choix social
- Analyse relationnelle et ordres médians

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
  - Notations et définitions
  - Relations binaires de préférence
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Principales sources du cours

- D. Bouyssou et P. Vincke, Relations binaires et modélisation des préférences. *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision*. Hermès. 2006.
- M. Öztürk, A. Tsoukiàs et P. Vincke. Preference modelling. *Multiple Criteria Decision Analysis : State of the Art Surveys*. Springer Verlag. 2005

## Relations binaires sur un ensemble $\mathbb{A}$

**Définition.** (Relations binaires sur un ensemble  $\mathbb{A}$ )

Soit  $\mathbb{A}$  un ensemble fini d'éléments  $\{a, b, c, \dots\}$  avec  $|\mathbb{A}| = n$ . Une relation binaire  $R$  sur  $\mathbb{A}$  est un sous-ensemble du produit cartésien  $R \subset \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ , c'est-à-dire un ensemble de paires ordonnées  $(a, b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ . Si nous avons  $(a, b) \in R$ , ce que l'on notera par  $aRb$  alors on dit que l'élément  $a$  est en relation avec l'élément  $b$  pour la relation  $R$ .

## Opérations sur les relations binaires

- Soient  $R$  et  $T$  deux relations binaires sur  $\mathbb{A}$ . Les relations binaires étant des ensembles, nous pouvons leur appliquer les opérations de la théorie des ensembles :
  - **Inclusion** :  $R \subseteq T \Leftrightarrow (aRb \Rightarrow aTb)$ .
  - **Union** :  $a(R \cup T)b \Leftrightarrow (aRb \vee aTb)$ .
  - **Intersection** :  $a(R \cap T)b \Leftrightarrow (aRb \wedge aTb)$ .
- On définit également le produit relatif entre relations :
  - **Produit relatif** :  $a(R \cdot T)b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{A} : aRk \wedge kTb$ .
- On notera  $T^2$  la relation  $T \cdot T$ .

## Propriétés

- $\hat{R} = \bar{\bar{R}} = \check{R}$ .
- $I_R = R \cap \check{R}$ .
- $P_R = R \cap \hat{R}$ .

## Relations binaires associées

- Etant donnée une relation binaire  $R$ , on introduit sa :
  - **relation complémentaire**,  $\bar{R} : \forall a, b \in \mathbb{A} : a\bar{R}b \Leftrightarrow \neg(aRb)$ .
  - **relation inverse**,  $\check{R} : \forall a, b \in \mathbb{A} : a\check{R}b \Leftrightarrow bRa$ .
  - **relation duale**,  $\hat{R} : \forall a, b \in \mathbb{A} : a\hat{R}b \Leftrightarrow b\bar{R}a$ .
  - **partie symétrique**,  $I_R : \forall a, b \in \mathbb{A} : aI_Rb \Leftrightarrow aRb \wedge bRa$ .
  - **partie asymétrique**,  $P_R : \forall a, b \in \mathbb{A} : aP_Rb \Leftrightarrow aRb \wedge b\bar{R}a$ .
  - **relation d'équivalence**,  $E_R : \forall a, b \in \mathbb{A} : aE_Rb \Leftrightarrow \forall k : \begin{cases} aRk \Leftrightarrow bRk \\ kRa \Leftrightarrow kRb \end{cases}$ .

## Propriétés des relations binaires

- Une relation binaire  $R$  est dite :
  - Réflexive ssi  $\forall a (aRa)$ .
  - Irréflexive ssi  $\forall a (a\bar{R}a)$ .
  - Symétrique ssi  $\forall a, b (aRb \Rightarrow bRa)$ .
  - Asymétrique ssi  $\forall a, b (aRb \Rightarrow b\bar{R}a)$ .
  - Antisymétrique ssi  $\forall a, b ((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$ .  
Ce qui est équivalent à ssi  $\forall a, b ((a \neq b) \Rightarrow (a\bar{R}b \vee b\bar{R}a))$  ou encore  $\forall a \neq b (aRb \Rightarrow b\bar{R}a)$ .
  - Complète ssi  $\forall a \neq b (aRb \vee bRa)$ .
  - Transitive ssi  $\forall a, b, c ((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$ .
  - Négativement transitive ssi  $\forall a, b, c ((a\bar{R}b \wedge b\bar{R}c) \Rightarrow a\bar{R}c)$ .
  - Semi-transitive ssi  $\forall a, b, c, d ((aRb \wedge bRc) \Rightarrow (aRd \vee dRc))$ .
  - de Ferrers ssi  $\forall a, b, c, d ((aRb \wedge cRd) \Rightarrow (aRd \vee cRb))$ .

## Sur les relations d'équivalence

- Une relation d'équivalence est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive (par exemple  $E_R$  introduit précédemment).
- Soit  $R$  une relation d'équivalence sur  $\mathbb{A}$ . Etant donné un élément  $a \in \mathbb{A}$ , on appelle classe d'équivalence associée à  $a$ , notée  $[a]_R$ , l'ensemble  $\{k \in \mathbb{A} : aRk\}$ . On a :
  - $a \in [a]_R$ .
  - $\forall a, b \in \mathbb{A}$ , on a soit  $[a]_R = [b]_R$ , soit  $[a]_R \neq [b]_R$ .
- Une relation d'équivalence induit donc une partition unique de  $\mathbb{A}$  en **classes d'équivalence**. L'ensemble de ces classes d'équivalence est appelé le **quotient** de  $\mathbb{A}$  par  $R$  et est noté  $\mathbb{A}/R$ .

## Propriétés en termes ensemblistes

- $R$  est symétrique  $\Leftrightarrow R = \check{R}$ .
- $R$  est asymétrique  $\Leftrightarrow R \cap \check{R} = \emptyset$ .
- $R$  est transitive  $\Leftrightarrow R^2 \subset R$ .
- $R$  est semi-transitive  $\Leftrightarrow R \cdot R \cdot \hat{R} \subset R$ .
- $R$  est de Ferrers  $\Leftrightarrow R \cdot \hat{R} \cdot R \subset R$ .

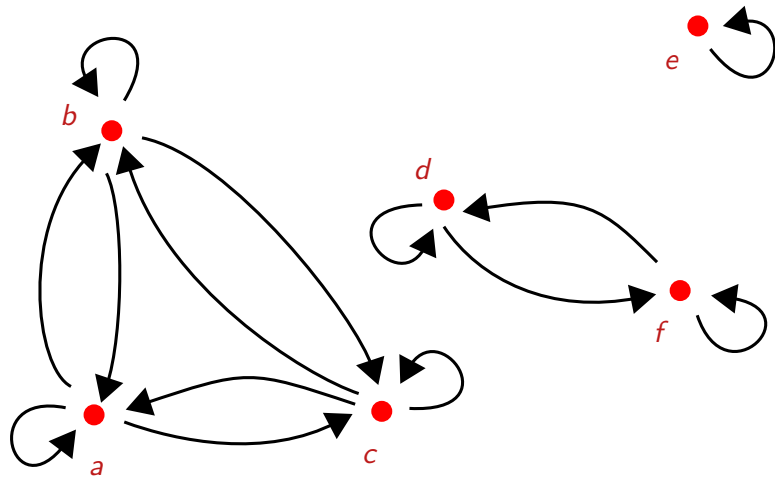
## Propriétés sur les propriétés des relations binaires

- Une relation asymétrique est irréflexive et antisymétrique.
- Une relation complète et négativement transitive est transitive.
- Une relation asymétrique et transitive est négativement transitive.

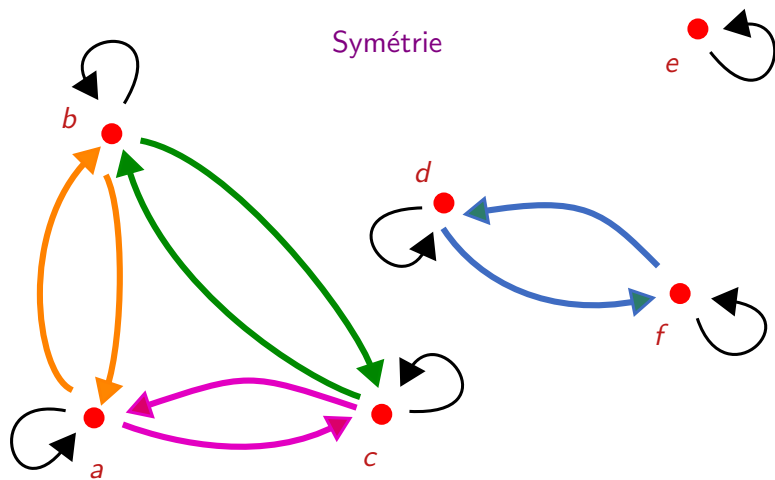
## Représentation graphique d'une relation binaire

- Une relation binaire  $R$  sur  $\mathbb{A}$  peut être représentée par un graphe orienté  $(\mathbb{A}, R)$  où  $\mathbb{A}$  est l'ensemble des sommets du graphe et  $R$  l'ensemble des arcs (paires ordonnées de sommets).
- Notons qu'une relation symétrique peut être représentée par un graphe non orienté où les sommets sont reliés par des arêtes (paires non ordonnées de sommets).

### Exemple : relation d'équivalence

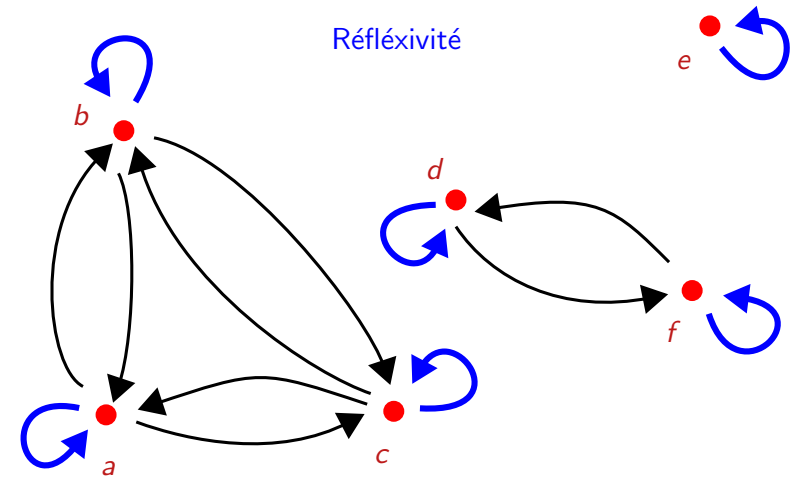


### Exemple : relation d'équivalence



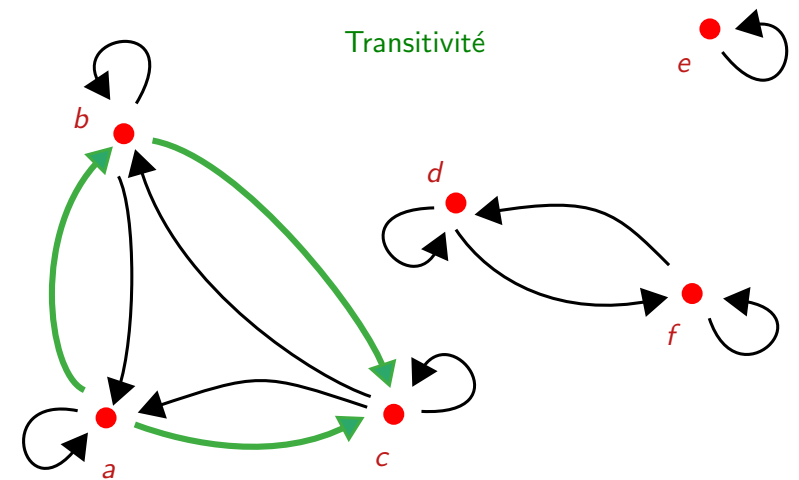
Symétrie

### Exemple : relation d'équivalence



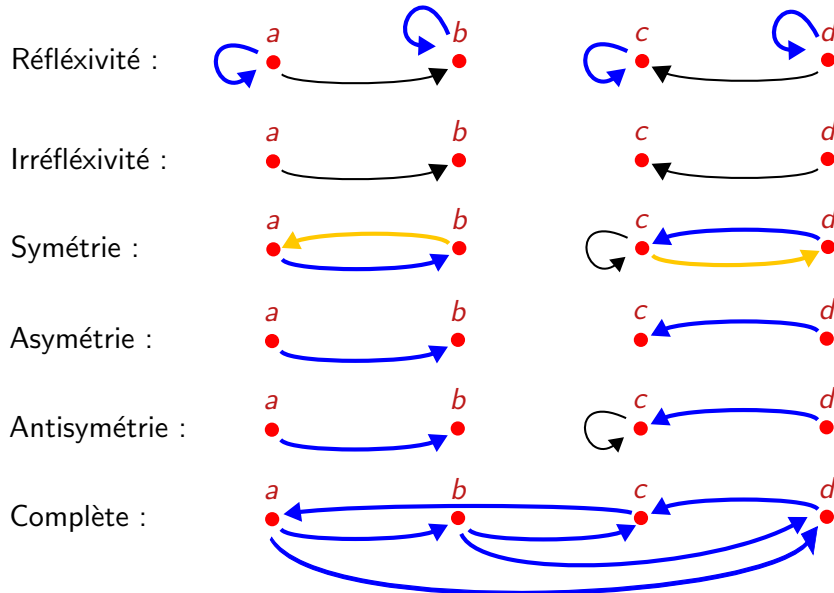
Réflexivité

### Exemple : relation d'équivalence



Transitivité

## Illustration graphique des propriétés des relations



## Représentation matricielle d'une relation binaire

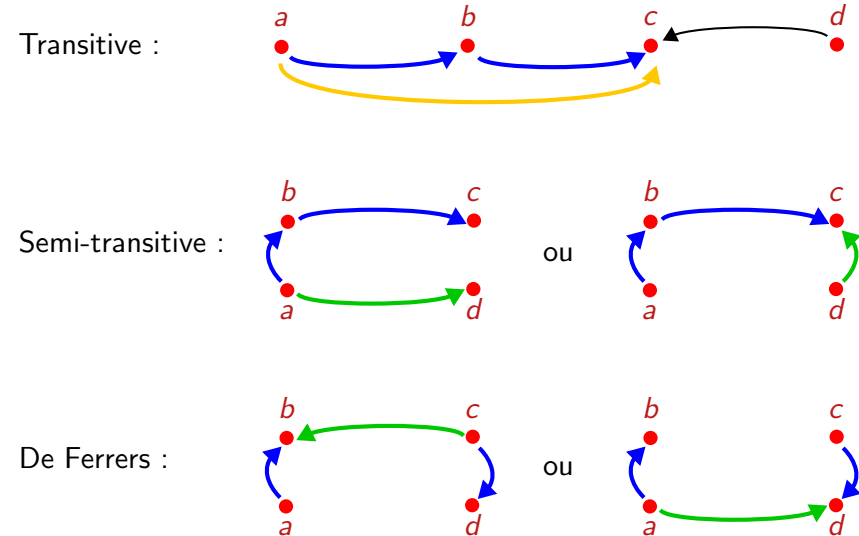
- Une relation binaire  $R$  sur  $\mathbb{A}$  peut être représentée par une matrice carrée de dimension  $|\mathbb{A}|$ , notée  $\mathbf{R}$ . Son terme général est défini de la manière suivante :

$$R_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } aRb \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La représentation matricielle de l'exemple précédent (relation d'équivalence) est la suivante :

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

## Illustration graphique des propriétés des relations



## Relations binaires associées et représentations matricielles

- Soit une relation binaire  $R$ , et sa représentation matricielle  $\mathbf{R}$  on a les termes généraux des représentations matricielles des relations binaires associées suivants :
  - **relation complémentaire** :  $\forall a, b \in \mathbb{A} : \bar{\mathbf{R}}_{ab} = 1 - \mathbf{R}_{ab}$ .
  - **relation inverse** :  $\forall a, b \in \mathbb{A} : \check{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{R}_{ba}$ .
  - **relation duale** :  $\forall a, b \in \mathbb{A} : \hat{\mathbf{R}}_{ab} = 1 - \mathbf{R}_{ba}$ .
  - **partie symétrique** :  $\forall a, b \in \mathbb{A} : (\mathbf{I}_R)_{ab} = \mathbf{R}_{ab} \wedge \check{\mathbf{R}}_{ab}$ .
  - **partie asymétrique** :  $\forall a, b \in \mathbb{A} : (\mathbf{P}_R)_{ab} = \mathbf{R}_{ab} \wedge \hat{\mathbf{R}}_{ab}$ .

## Relations binaires associées et représentations matricielles (suite)

- Soit une relation binaire  $R$ , et sa représentation matricielle  $\mathbf{R}$  on a les représentations matricielles des relations binaires associées suivantes :
  - **relation complémentaire** :  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{U} - \mathbf{R}$ .
  - **relation inverse** :  $\check{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^t$ .
  - **relation duale** :  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{U} - \check{\mathbf{R}}$ .
  - **partie symétrique** :  $\mathbf{I}_R = \mathbf{R} \wedge \check{\mathbf{R}}$ .
  - **partie asymétrique** :  $\mathbf{P}_R = \mathbf{R} \wedge \hat{\mathbf{R}}$ .

où  $\mathbf{U}$  est la matrice remplie de 1;  $\mathbf{R}^t$  est la transposée de  $\mathbf{R}$ ;  $\mathbf{R} \wedge \mathbf{T}$  est l'opération d'intersection (ou de conjonction) terme à terme entre les deux matrices.

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
  - Notations et définitions
  - Relations binaires de préférence
    - Relations  $I, J, P$  issues de  $R$
    - Relations de préférences classiques
    - Relations de préférences à seuil
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Propriétés matricielles des relations binaires

- Soit  $\mathbf{R}$  la représentation matricielle de la relation binaire  $R$  :
  - une relation binaire réflexive est telle que  $\forall a : \mathbf{R}_{aa} = 1$ . (1 partout sur la diagonale)
  - une relation binaire irreflexive est telle que  $\forall a : \mathbf{R}_{aa} = 0$ . (0 partout sur la diagonale)
  - une relation binaire symétrique est telle que  $\forall a, b : \mathbf{R}_{ab} = \mathbf{R}_{ba}$ . (matrice symétrique)
  - une relation binaire asymétrique est telle que  $\forall a, b : \mathbf{R}_{ab} = 1 - \mathbf{R}_{ba}$ . (matrice asymétrique)
  - $R$  est transitive si  $\forall a, b : [\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}]_{ab} \leq \mathbf{R}_{ab}$  où  $\cdot$  est le produit matriciel booléen donné par :

$$[\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}]_{ab} = \bigvee_{k \in \mathbb{A}} (\mathbf{R}_{ak} \wedge \mathbf{T}_{kb})$$

## Relations $I, J, P$ issues de $R$

- Etant donnée une relation binaire  $R$  **réflexive**<sup>1</sup>, pour toute paire  $(a, b)$ , on aura une et une seule des quatre situations suivantes :
  - $(aRb \wedge bRa)$ , notée  $aI_R b$ , que l'on interprète comme "a est **indifférent** de b".
  - $(a\bar{R}b \wedge b\bar{R}a)$ , notée  $aJ_R b$ , que l'on interprète comme "a est **incomparable** à b".
  - $(aRb \wedge b\bar{R}a)$ , notée  $aP_R b$ , que l'on interprète comme "a est **strictement préféré** à b".
  - $(a\bar{R}b \wedge bRa)$ , notée  $bP_R a$ , que l'on interprète comme "b est **strictement préféré** à a".
- Ces situations sont résumées par l'intermédiaire du tableau suivant. S'il n'y a pas de confusion possible, on notera  $I, J, P$  à la place de  $I_R, J_R, P_R$  :

	$bRa$	$b\bar{R}a$
$aRb$	$aIb$	$aPb$
$a\bar{R}b$	$bPa$	$aJb$

1. On supposera dans toute la suite que  $R$  est réflexive sauf mention contraire.

## Propriétés des relations $I, J, P$

- $I$  et  $J$  sont symétriques.
- $I$  est la partie symétrique de  $R$  (cf relations binaires associées à  $R$ ).
- $J$  est la partie symétrique de  $\bar{R}$ .
- $P$  est asymétrique.
- Les trois relations  $P, I, J$  sont :
  - mutuellement exclusives :  $P \cap I = P \cap J = I \cap J = \emptyset$ ,
  - exhaustives :  $P \cup \bar{P} \cup I \cup J = \mathbb{A}^2$ .
- Remarque : on pourra trouver dans la littérature les notations suivantes,  $\succeq$  ("préféré ou indifférent à") au lieu de  $R$ ,  $\succ$  ("strictement préféré à") au lieu de  $P$  et  $\sim$  ("indifférent à") au lieu de  $I$ .

## Exemple (Calcul de $I$ )

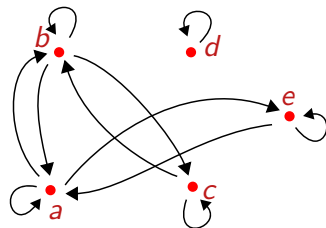
Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit  
 $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (e, a), (e, c), (e, e)\}$ .

$I = \{(a, a), (a, b), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d), (e, a), (e, e)\}$ .

Représentation matricielle :

$$I = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ a & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ c & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ d & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



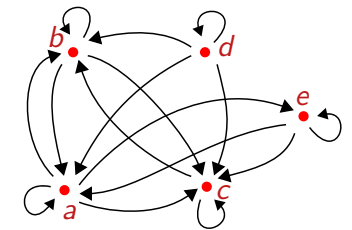
## Exemple

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit  
 $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (e, a), (e, c), (e, e)\}$ .

Représentation matricielle :

$$R = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ a & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ c & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ d & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



## Exemple (Calcul de $J$ )

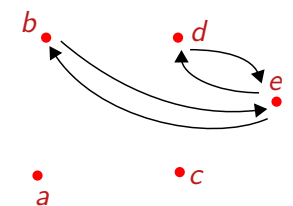
Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit  
 $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (e, a), (e, c), (e, e)\}$ .

$J = \{(b, e), (b, e), (d, e), (e, d)\}$ .

Représentation matricielle :

$$J = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ a & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ b & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ c & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ d & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :





Exemple (Calcul de  $P$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

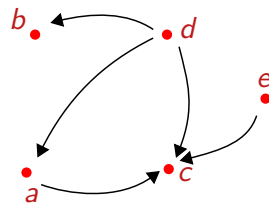
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (e, a), (e, c), (e, e)\}$ .

$P = \{(a, c), (d, a), (d, b), (d, c), (e, c)\}$ .

Représentation matricielle :

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



## Relation d'ordre total (ou complet)

Définition.

$R$  est une **relation d'ordre total** ssi :

- $R$  est complète.
  - $R$  est transitive.
  - $R$  est antisymétrique.
- Pour une relation d'ordre total :
- $J$  est vide (en raison de la complétude).
  - $I$  est l'ensemble  $\{(a, a)\}_{a \in \mathbb{A}}$ .
  - $P$  est transitive.
  - Il n'y a pas d'ex-aequo possible.
  - On peut permuter les objets de telle sorte à ce que la représentation matricielle fasse apparaître une partie triangulaire.
  - $I \cdot P \subset P$ .
  - $P \cdot I \subset P$ .

## Exemple d'une relation d'ordre total (ou complet)

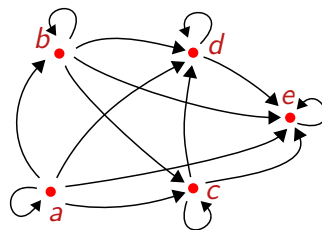
Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$ .

Représentation matricielle :

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :

Exemple d'un ordre total (Calcul de  $I$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

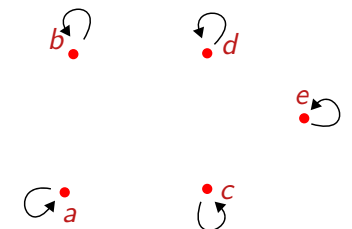
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}$ .

$I = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$ .

Représentation matricielle :

$$I = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



Exemple d'un ordre total (Calcul de  $J$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

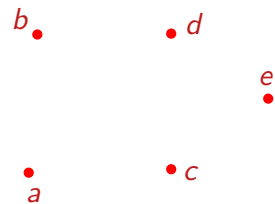
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}$ .

$J = \emptyset$ .

Représentation matricielle :

$$\mathbf{J} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



## Représentation numérique d'une relation d'ordre total

**Théorème.**

$R$  est une relation d'ordre total ssi il existe une fonction  $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$\begin{cases} aRb \Leftrightarrow g(a) \geq g(b) \\ g(a) = g(b) \Rightarrow a = b \end{cases}$$

- Remarque : la représentation numérique d'une relation d'ordre total n'est pas unique.
- Exemple : pour l'exemple précédent la fonction  $g$  telle que  $g(a) = 5, g(b) = 4, g(c) = 3, g(d) = 2, g(e) = 1$  est une représentation numérique. Ainsi, toute transformation monotone croissante de  $g$  est également une représentation numérique. Par exemple,  $h(a) = 0.9, h(b) = 0.8, h(c) = 0.7, h(d) = 0.6, h(e) = 0.5$  est une autre représentation numérique.

Exemple d'un ordre total (Calcul de  $P$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

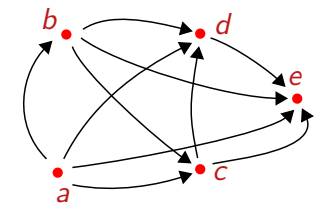
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}$ .

$P = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)\}$ .

Représentation matricielle :

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



## Relation de préordre total (ou complet)

**Définition.**

$R$  est une **relation de préordre total** ssi :

- $R$  est complète.
- $R$  est transitive.
- Pour une relation de préordre total :
  - $J$  est vide.
  - $I$  est transitive (relation d'équivalence).
  - $P$  est transitive et négativement transitive.
  - Les ex-aequo sont possibles.
  - $I \cdot P \subset P$ .
  - $P \cdot I \subset P$ .
  - La relation  $R$  induit un ordre total sur l'ensemble quotient  $\mathbb{A}/R$ .
  - On peut permuter les objets de façon à ce que la représentation matricielle fasse apparaître une "frontière en escalier" (entre les 1 et les 0).

## Exemple d'une relation de préordre total (ou complet)

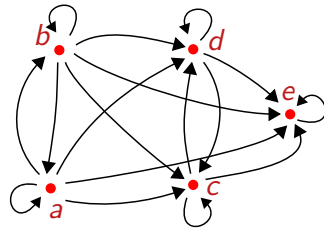
Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}.$$

Représentation matricielle :

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :

Exemple de préordre total (Calcul de  $J$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

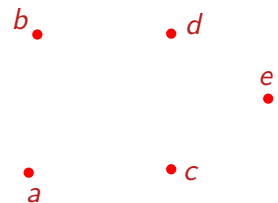
$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}.$$

$$J = \emptyset.$$

Représentation matricielle :

$$J = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :

Exemple de préordre total (Calcul de  $I$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

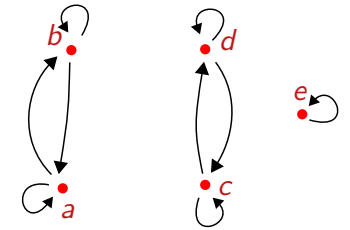
$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}.$$

$$I = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e)\}.$$

Représentation matricielle :

$$I = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :

Exemple de préordre total (Calcul de  $P$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

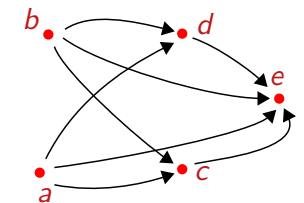
$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}.$$

$$P = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, e), (d, e)\}.$$

Représentation matricielle :

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



## Représentation numérique d'une relation de préordre total

### Théorème.

$R$  est une relation de préordre total ssi il existe une fonction  $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$aRb \Leftrightarrow g(a) \geq g(b)$$

De manière équivalente,  $R$  est une relation de préordre total ssi il existe une fonction  $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$\begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ alb \Leftrightarrow g(a) = g(b) \end{cases}$$

- Remarque : comme pour les ordres totaux, la représentation numérique d'une relation de préordre total n'est pas unique.
- Une représentation numérique de l'exemple précédent pourrait être la suivante :  
 $g(a) = 0.85, g(b) = 0.85, g(c) = 0.45, g(d) = 0.45, g(e) = 0.4$ .

## Exemple d'une relation de semi-ordre

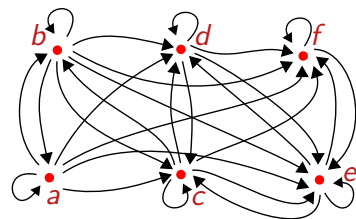
Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}.$$

Représentation matricielle :

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



## Relation de semi-ordre

### Définition.

$R$  est une **relation de semi-ordre** (également appelée *quasi-ordre*) ssi :

- $R$  est complète.
  - $R$  est de Ferrers.
  - $R$  est semi-transitive.
- Pour une relation de semi-ordre :
    - $J$  est vide.
    - $P$  est transitive, de Ferrers, et semi-transitive.
    - $P \cdot I \cdot P \subset P$ .
    - $P \cdot P \cdot I \subset P$ .
    - $I \cdot P \cdot P \subset P$ .
    - Un semi-ordre correspond à un modèle de préférence avec un seuil de discrimination fixe.

## Exemple de semi-ordre (Calcul de $I$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

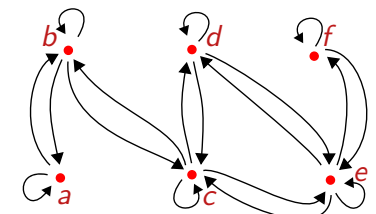
$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}.$$

$$I = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}.$$

Représentation matricielle :

$$I = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



Exemple de semi-ordre (Calcul de  $J$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

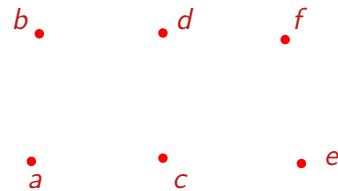
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}$ .

$J = \emptyset$ .

Représentation matricielle :

$$J = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



## Préordre total associé à un semi-ordre

- Soit  $R$  une relation binaire sur  $\mathbb{A}$ . La relation  $R^\pm$  sur  $\mathbb{A}$  définie par,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$aR^\pm b \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{A} : \begin{cases} bRk \Rightarrow aRk \\ kRa \Rightarrow kRb \end{cases}$$

est appelée **trace** de  $R$ .

- La trace d'une relation binaire est par construction réflexive et transitive.

## Théorème.

Soit  $R$  une relation binaire réflexive sur  $\mathbb{A}$ .  $R$  est un semi-ordre ssi sa trace  $R^\pm$  est complète.

Exemple de semi-ordre (Calcul de  $P$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

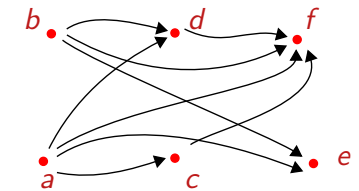
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}$ .

$P = \{(a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f), (c, f), (d, f)\}$ .

Représentation matricielle :

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :

Exemple de semi-ordre (Calcul de  $R^\pm$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}$ .

$R^\pm = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (e, f), (f, f)\}$ .

Représentation matricielle :

$$R^\pm = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Remarque : si on range les colonnes et lignes de la représentation

## Représentation numérique d'une relation de semi-ordre

### Théorème.

$R$  est une relation de semi-ordre ssi il existe une fonction  $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  et une constante  $q \geq 0$  (seuil de discrimination fixe) telles que,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

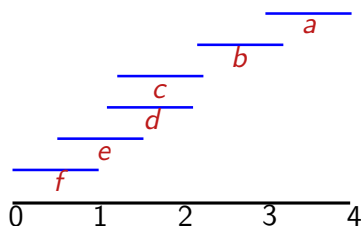
$$aRb \Leftrightarrow g(a) \geq g(b) - q$$

De manière équivalente,  $R$  est une relation de semi-ordre ssi il existe une fonction  $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$\begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q \\ alb \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q \end{cases}$$

## Représentation numérique de la relation de semi-ordre de l'exemple

- On peut commencer par choisir une valeur arbitraire pour  $q$ ,  $q = 1$  par exemple. Puis la fonction  $g$  sera construite en associant des valeurs croissantes aux éléments  $f, e, d, c, b, a$  tout en satisfaisant la représentation numérique souhaitée. Si on souhaite des valeurs comprises entre 0 et 4 par exemple une solution est alors la suivante :  $g(f) = 0, g(e) = 0.5, g(d) = 1.1, g(c) = 1.2, g(b) = 2.15, g(a) = 3$ .
- Si on associe  $\forall a$ , l'intervalle  $[g(a), g(a) + q]$  alors nous avons la représentation suivante en termes d'intervalles :



## Représentation numérique d'une relation de semi-ordre

### Remarques :

- Permet de comparer des objets évalués numériquement en introduisant un seuil constant en-dessous duquel une différence n'est plus considérée comme significative d'une relation de préférence stricte. Dans ce cas, la relation d'indifférence n'est pas transitive.
- Comme pour les ordres totaux, la représentation numérique d'une relation de semi-ordre total n'est pas unique.

## Relation d'ordre d'intervalle

### Définition.

$R$  est une **relation d'ordre d'intervalle** ssi :

- $R$  est complète.
- $R$  est de Ferrers.
- Pour une relation d'ordre d'intervalle :
  - $J$  est vide.
  - $P$  est transitive, et de Ferrers.
  - $P \cdot I \cdot P \subset P$ .
  - La relation d'ordre d'intervalle généralise les autres relations binaires de préférences.
  - Un ordre d'intervalle correspond à un modèle de préférence avec un seuil de discrimination variable.

## Exemple d'une relation d'ordre d'intervalle

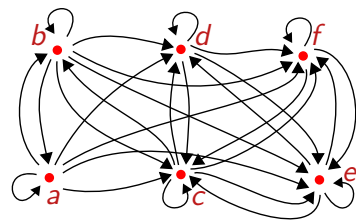
Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, c), (f, e), (f, f)\}.$$

Représentation matricielle :

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :

Exemple d'ordre d'intervalle (Calcul de  $J$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

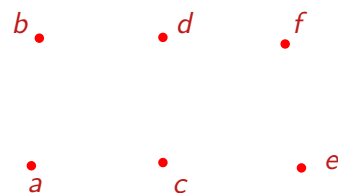
$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}.$$

$$J = \emptyset.$$

Représentation matricielle :

$$J = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :

Exemple d'ordre d'intervalle (Calcul de  $I$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

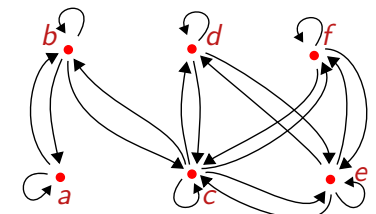
$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}.$$

$$I = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, c), (f, e), (f, f)\}.$$

Représentation matricielle :

$$I = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :

Exemple d'ordre d'intervalle (Calcul de  $P$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

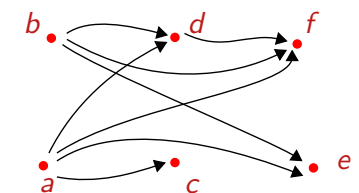
$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}.$$

$$P = \{(a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f), (d, f)\}.$$

Représentation matricielle :

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



## Préordre total associé à un ordre d'intervalle

- Soit  $R$  une relation binaire sur  $\mathbb{A}$ . Les relations  $R^+$  et  $R^-$  sur  $\mathbb{A}$  définies par,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$aR^+b \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{A} : bRk \Rightarrow aRk)$$

et

$$aR^-b \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{A} : kRa \Rightarrow kRb)$$

sont respectivement appelées **trace à droite** et **à gauche** de  $R$ .

- Ces relations binaires sont par construction réflexives et transitives.

### Théorème.

Soit  $R$  une relation binaire réflexive sur  $\mathbb{A}$ .  $R$  est un ordre d'intervalle ssi sa trace à droite  $R^+$  est complète. De manière équivalente, nous avons également :  $R$  est un ordre d'intervalle ssi sa trace à gauche  $R^-$  est complète.

## Exemple d'ordre d'intervalle (représentation matricielle avec "frontière escalier")

Représentation matricielle tenant compte des ordres engendrés par  $R^+$  et  $R^-$  :

$$R = \begin{matrix} & a & b & d & c & e & f \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

## Exemple d'ordre d'intervalle (Calcul de $R^+$ et $R^-$ )

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}.$$

Représentations matricielles :

$$R^+ = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} ; \quad R^- = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Remarque : si l'on range les lignes de la représentation matricielle selon un ordre compatible avec  $R^+$  et les colonnes selon un ordre compatible avec  $R^-$ , on peut obtenir une "frontière en escalier".

## Représentation numérique d'une relation d'ordre d'intervalle

### Théorème.

$R$  est une relation d'ordre d'intervalle ssi il existe deux fonctions  $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  (seuil de discrimination variable qui dépend du niveau) telles que,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$aRb \Leftrightarrow g(a) + q(g(a)) \geq g(b)$$

De manière équivalente,  $R$  est une relation d'ordre d'intervalle ssi il existe deux fonctions  $g$  et  $q$  telles que,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$\begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(g(b)) \\ alb \Leftrightarrow (g(a) \leq g(b) + q(g(b))) \wedge (g(b) \leq g(a) + q(g(a))) \end{cases}$$



## Représentation numérique de la relation d'ordre d'intervalle de l'exemple

- On peut construire une représentation numérique de la structure d'ordre d'intervalle de l'exemple en commençant par choisir arbitrairement dans l'ordre croissant de la dernière à la première colonne de la matrice (les colonnes ayant été rangées selon  $\mathbf{R}^-$ ), les valeurs de la fonction  $g$ . Par exemple  $g(f) = 0, g(e) = 5, g(c) = 10, g(d) = 15, g(b) = 20, g(a) = 25$ .
- Ensuite, les valeurs  $g + q$ , sont définies dans l'ordre croissant de la dernière à la première ligne de la matrice (les lignes ayant été rangées selon  $\mathbf{R}^+$ ) tout en satisfaisant à la représentation voulue. Par exemple :  $(g + q)(f) = 12, (g + q)(e) = 17, (g + q)(d) = 19, (g + q)(c) = 23, (g + q)(b) = 28, (g + q)(a) = 30$ .

## Sur les modèles de préférence à seuil

- Ils sont utilisés lorsque l'évaluation numérique des éléments de  $\mathbb{A}$  ne peut s'effectuer de manière précise (ie par un nombre).
- Dans ce cas, l'évaluation peut se faire par le biais d'intervalles :  $\forall a \in \mathbb{A} : [g(a), g(a) + q(g(a))] = [l_a, u_a]$ .
- Pour comparer ces éléments au sens d'une relation binaire :
  - Pour qu'il y ait une préférence il faut que les intervalles soient disjoints :

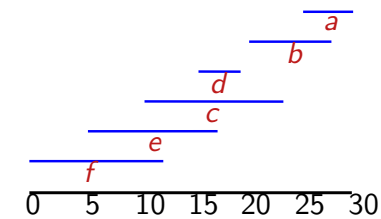
$$\begin{cases} aPb \Leftrightarrow l_a > u_b \\ alb \Leftrightarrow (l_a \leq u_b) \wedge (l_b \leq u_a) \end{cases}$$

On est dans ce cas sur des ordres d'intervalles.

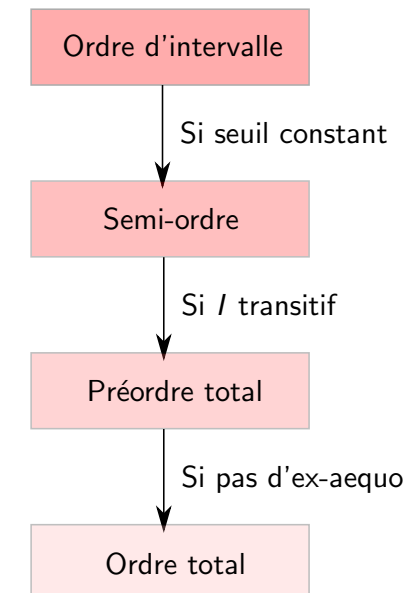
- Si de plus les intervalles sont de longueurs identiques alors on est dans ce cas sur des semi-ordres.

## Représentation en termes d'intervalles de la relation d'ordre d'intervalle de l'exemple

- Si on associe  $\forall a$ , l'intervalle  $[g(a), g(a) + q(g(a))]$  alors nous avons la représentation suivante en termes d'intervalles :



## Relations entre les différents types de préférences



## Relations de préférence partielles

- Nous avons considéré précédemment que  $R$  était complète. Cette hypothèse peut être critiquable, en effet, il est possible que :
  - l'on dispose de très peu d'information sur un ou plusieurs des éléments de  $\mathbb{A}$ ,
  - les objets à comparer ne sont peut être pas tous familiar à la personne devant les comparer.
  - ...
- Dans ces cas, les relations d'incomparabilité  $J$  sont non-vides ( $J \neq \emptyset$ ).
- Les résultats relatifs aux ordres et préordres totaux restent globalement vrais pour les ordres et préordres partiels.

## Principales sources du cours

- J.L. Marichal, Fonctions d'agrégation pour la décision. *Concepts et Méthodes pour l'aide à la décision*. Hermès. 2006.
- V. Torra et Y. Narukawa, Modeling Decisions - Information fusion and aggregation operators. Springer. 2007.
- M. Detyniecki, Numerical Aggregation Operators : State of the Art, *International Summer School on Aggregation Operators and their Applications (Asturias, Spain)*. July 2001.

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
  - Introduction
  - Propriétés mathématiques élémentaires
  - Propriétés algébriques
  - Les moyennes
  - Les moyennes quasi-linéaires
  - Opérateurs OWA ("Ordered Weighted Averaging")
  - Poids dans les opérateurs WAM et OWA
  - Ensembles flous, t-normes et t-conormes
  - Intégrales de Choquet
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Qu'est-ce qu'un opérateur d'agrégation ?

- Le **problème d'agrégation** consiste à combiner  $m$  objets appartenant à un ensemble donné en un objet de cet ensemble.
- Dans ce cours, nous nous intéressons aux **opérateurs ou fonctions d'agrégation**. Dans ce cas, il s'agit de combiner  $m$  **valeurs numériques** appartenant à  $\mathbb{R}$ , en une seule.

## Échelles numériques ordinales ou cardinales

- Les valeurs à agréger appartiennent à des échelles numériques qui peuvent être de deux types :
  - **échelles ordinales** : les valeurs ont pour unique signification la définition d'une relation d'ordre sur l'échelle, les distances ou différences entre valeurs n'ont pas de signification particulière et ne peuvent être interprétées.  
Par exemple, les valeurs sont des rangs (des entiers naturels) attribués à l'alternative. De manière générale, **les représentations numériques des relations d'ordre et de préordre** (qui ne sont pas uniques - cf cours sur la représentation des préférences).
  - **échelles cardinales** : les valeurs ne sont pas arbitraires et sont telles que les différences et distances entre valeurs ont une signification.

## Exemples d'application

- Exemples d'application :
  - Les notes obtenues par un étudiant dans  $m$  matières. Dans ce cas on agrège des valeurs numériques appartenant à  $[0, 20]$  afin d'obtenir une note générale appartenant à  $[0, 20]$ .
  - Les degrés de satisfaction d'un projet vis à vis de  $m$  critères. Dans ce cas, il s'agit d'agréger  $m$  valeurs numériques de  $[0, 1]$  par exemple afin d'obtenir une valeur comprise entre 0 et 1 qui résume celles-ci.
  - Les scores obtenus par un sportif jugé par  $m$  juges lors d'une compétition. Dans ce cas, les scores sont des valeurs numériques entre 0 et 5 par exemple et il s'agit de combiner ces scores afin d'obtenir un score final.
- Dans notre contexte, nous supposons qu'il y a  $n$  **alternatives** (étudiants ou projets ou sportifs par exemple) et  $m$  **attributs** (resp matières ou critères ou juges par exemple). L'opérateur d'agrégation permet alors de combiner pour chacune des  $n$  alternatives ses  $m$  valeurs numériques.

## Échelles numériques cardinales

- Notons  $a_j, b_j, c_j, d_j$  des valeurs numériques de  $\mathbb{R}$  prises par quatre alternatives  $a, b, c, d$  pour l'attribut  $j$ . Parmi les échelles numériques cardinales, on distingue les :
  - **échelles d'intervalles** : les valeurs sont définies à une transformation linéaire positive près :  $\phi(a_j) = ra_j + s$  avec  $r > 0$  et  $s \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas, la position du zéro est purement conventionnelle et les ratios entre intervalles sont invariants :  $\frac{a_j - b_j}{c_j - d_j} = \frac{\phi(a_j) - \phi(b_j)}{\phi(c_j) - \phi(d_j)}$ .  
Par exemple, les températures exprimées en Degré Celcius et en Fahrenheit :  $\phi(a_j) = 1.8a_j + 32$
  - **échelles de ratios** : les valeurs sont définies à une constante multiplicative positive près :  $\phi(a_j) = ra_j$  avec  $r > 0$ . Dans ce cas, un zéro réel existe et les ratios entre valeurs sont indépendants de  $\phi$  :  $\frac{a_j}{b_j} = \frac{\phi(a_j)}{\phi(b_j)}$ .  
Par exemple, les distances en kilomètres et en miles :  $\phi(a_j) = 0.62137a_j$

## Cas où les critères ont des types d'échelle différents

- Dans ce cours, nous supposons que les **attributs sont tous exprimés dans une échelle commune** :
  - Les attributs s'expriment toutes dans une échelle ordinale : représentation numérique des attributs dans une échelle commune et agrégation de ces valeurs
  - Les attributs s'expriment toutes dans une échelle cardinale :
    - s'il s'agit de la même échelle cardinale alors agrégation des valeurs initiales
    - s'il s'agit d'échelles différentes alors représentation des valeurs dans une échelle commune et agrégation de ces valeurs
  - Les attributs s'expriment soit dans une échelle ordinale soit dans une échelle cardinale : représentation numérique des valeurs dans une échelle commune et agrégation de ces valeurs

## Exemples d'échelles

Voitures	prix (euros)	conso. (l/100 km)	niv. poll.	niv. confort
<i>a</i>	10k	6.5	A	Mauvaise
<i>b</i>	20k	7.6	A	Bonne
<i>c</i>	25k	7.5	B	Moyenne
<i>d</i>	30k	8.2	C	Très bonne

- Si les échelles sont différentes, on transforme les données en **degrés de satisfaction** qui sont des valeurs numériques dans  $[0, 1]$  :

Voitures	prix (euros)	conso. (l/100 km)	niv. poll.	niv. confort
<i>a</i>	1	0.9	1	0
<i>b</i>	0.5	0.6	1	0.5
<i>c</i>	0.25	0.55	0.5	0.3
<i>d</i>	0	0.2	0.1	1

## Exemples d'échelles

Étudiants	math.	info.	phys.	litt.
<i>a</i>	15	16	13	11
<i>b</i>	12	13	12	16
<i>c</i>	12	17	14	12

## Notations et formalisation du problème

Nous avons les données suivantes :

- Ensemble des alternatives  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, \dots\}$  avec  $|\mathbb{A}| = n$
- Ensemble des attributs ou critères  $\mathbb{C} = \{1, 2, 3, 4, \dots, m\}$  avec  $|\mathbb{C}| = m$
- Valeurs numériques prises par les alternatives pour chaque critère :  $\forall j \in \mathbb{C}, \forall a \in \mathbb{A} : a_j \in \mathbb{R}$ .
- Ensemble des **profils** des alternatives qui est un ensemble de vecteurs tel que  $\forall a \in \mathbb{A}$  on lui associe le vecteur  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$

Alternative	Attr. 1	Attr. 2	...	Attr. <i>m</i>	Valeur agrégée
<i>a</i>	$a_1$	$a_2$	...	$a_m$	$A(\mathbf{a})$
<i>b</i>	$b_1$	$b_2$	...	$b_m$	$A(\mathbf{b})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$

où  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est un **opérateur d'agrégation** qui à tout profil  $\mathbf{a}$  lui associe une valeur numérique  $A(\mathbf{a}) = A(a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}$ .

## Exemple de problème d'agrégation de valeurs numériques

Étudiants	math.	info.	phys.	litt.	Valeur agrégée
<i>a</i>	15	16	13	11	?
<i>b</i>	12	13	12	16	?
<i>c</i>	12	17	14	12	?

## Exemples d'application

- Résumer des valeurs exprimées par plusieurs "juges" ou "experts" en une seule
- Agréger les valeurs exprimées par plusieurs critères pour faire de l'aide à la décision
- Meilleure compréhension d'un domaine d'application

## Exemple de problème d'agrégation de valeurs numériques

Voitures	prix (euros)	conso. (l/100 km)	niv. poll.	niv. confort	Valeur agrégée
<i>a</i>	1	0.9	1	0	?
<i>b</i>	0.5	0.6	1	0.5	?
<i>c</i>	0.25	0.55	0.5	0.3	?
<i>d</i>	0	0.2	0.1	1	?

## Quelques exemples d'opérateurs d'agrégation classiques

Soit  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$  le profil de l'alternative  $a$ .

- La moyenne arithmétique notée  $AM$  ("Arithmetic Mean") :

$$AM(\mathbf{a}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j$$

- La moyenne pondérée notée  $WAM$  ("Weighted Arithmetic Mean") :

$$WAM_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m w_j a_j$$

où  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  est tel que  $\forall j : w_j \geq 0$  et  $\sum_{j=1}^m w_j = 1$

- La médiane :

$$\text{med}(\mathbf{a}) = \text{med}\{a_j\}_{j=1, \dots, m}$$

- Le minimum :

$$\min(\mathbf{a}) = \min\{a_j\}_{j=1, \dots, m}$$

## Comment choisir un opérateur d'agrégation ?

- Il existe de très nombreux opérateurs d'agrégation. Comment choisir ?

⇒ **Démarche axiomatique** : choisir un opérateur en fonction des propriétés mathématiques qu'il vérifie et en fonction du problème traité.

- Dans la suite nous nous intéressons donc aux propriétés "souhaitables" que devraient satisfaire des opérateurs d'agrégation.

## Propriétés mathématiques élémentaires

- Symétrie
- Continuité
- Non décroissance
- Idempotence

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
  - Introduction
  - Propriétés mathématiques élémentaires
  - Propriétés algébriques
  - Les moyennes
  - Les moyennes quasi-linéaires
  - Opérateurs OWA ("Ordered Weighted Averaging")
  - Poids dans les opérateurs WAM et OWA
  - Ensembles flous, t-normes et t-conormes
  - Intégrales de Choquet
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social

## 4 Analyse relationnelle et ordres medians

## Symétrie

### Définition.

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est **symétrique** si  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  et  $\forall \pi \in \Pi_m$  (ensemble des permutations d'ordre  $m$ ) :

$$A(a_1, a_2, \dots, a_m) = A(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(m)})$$

- La symétrie indique que l'ordre des attributs n'est pas important pour l'agrégation.
- Ceci est requis lorsque l'on combine des critères de même importance ou des opinions de juges anonymes.

## Continuité

### Définition.

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est **continu** si  $A$  est une fonction continue en chacun de ses arguments.

- Ceci implique qu'à une variation infinitésimale de  $\mathbf{a}$  correspond une variation infinitésimale de  $A(\mathbf{a})$ .

## Non décroissance (suite)

- Une fonction d'agrégation **non décroissante** ne décroît pas si au moins une valeur partielle croît.
- Une fonction d'agrégation **strictement croissante** croît si au moins une valeur partielle croît.
- Une fonction d'agrégation **unanimentement croissante** croît si toutes les valeurs partielles croissent.

## Non décroissance

- Soit la relation suivante définie entre deux profils quelconques  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  :  
 $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow (\forall j : a_j \leq b_j)$ . De manière similaire :  $\mathbf{a} < \mathbf{b} \Leftrightarrow (\forall j : a_j < b_j)$ .

### Définition.

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est :

- **non décroissant** si  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} (\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Rightarrow A(\mathbf{a}) \leq A(\mathbf{b}))$ .
- **strictement croissant**, s'il est non décroissant et si :  
 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} (((\mathbf{a} \leq \mathbf{b}) \wedge (\exists j : a_j < b_j)) \Rightarrow A(\mathbf{a}) < A(\mathbf{b}))$ .
- **unanimentement croissant**, s'il est non décroissant et si :  
 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} (\mathbf{a} < \mathbf{b} \Rightarrow A(\mathbf{a}) < A(\mathbf{b}))$ .

## Idempotence

### Définition.

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est **idempotent** si  $\forall \mathbf{a} = (a, \dots, a) : A(\mathbf{a}) = a$

- Ceci est requis dans de nombreuses applications : si tous les  $a_j$  sont identiques et valent  $a$  alors  $A(a_1, \dots, a_m)$  doit valoir  $a$ .

## Classification du comportement d'un opérateur d'agrégation

### Définition.

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est :

- **conjonctif** si  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m : A(\mathbf{a}) \leq \min(\mathbf{a})$
- **disjonctif** si  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m : A(\mathbf{a}) \geq \max(\mathbf{a})$
- **interne** si  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m : \min(\mathbf{a}) \leq A(\mathbf{a}) \leq \max(\mathbf{a})$

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
  - Introduction
  - Propriétés mathématiques élémentaires
  - Propriétés algébriques
  - Les moyennes
  - Les moyennes quasi-linéaires
  - Opérateurs OWA ("Ordered Weighted Averaging")
  - Poids dans les opérateurs WAM et OWA
  - Ensembles flous, t-normes et t-conormes
  - Intégrales de Choquet
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social

## Classification du comportement d'un opérateur d'agrégation (suite)

- Les opérateurs **conjonctifs** combinent les valeurs comme si elles étaient reliées par un "ET" : la valeur agrégée est élevée uniquement si toutes les valeurs partielles sont élevées.
- Les opérateurs **disjonctifs** au contraire agissent comme si les valeurs étaient reliées par un "OU" : la valeur agrégée est élevée si au moins une des valeurs partielles est élevée.
- Entre ces deux situations extrêmes, se trouvent les fonctions **internes** pour lesquelles une valeur partielle faible peut être compensée par une valeur partielle élevée (grande majorité des fonctions d'agrégation).

## Propriétés algébriques

- Associativité et suite associative.
- Suite décomposable.
- Bisymétrie et suite bisymétrique.



## Associativité

### Définition.

$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est **associative** si

$$\forall \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) : A(A(a_1, a_2), a_3) = A(a_1, A(a_2, a_3))$$

- Notons par  $A^{(m)}$  un opérateur d'agrégation ayant  $m \geq 1$  arguments.

### Définition. (Suite associative)

La suite  $(A^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R})_{m \geq 1}$  est **associative** si  $\forall \mathbf{a} = (a) : A^{(1)}(\mathbf{a}) = a$  et si  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m, \forall k = 1, \dots, m :$

$$A^{(m)}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m) = A^{(2)}(A^{(k)}(a_1, \dots, a_k), A^{(m-k)}(a_{k+1}, \dots, a_m))$$

- La propriété d'associativité indique que l'on peut passer facilement de l'agrégation de  $m$  valeurs à celle de  $m + 1$  valeurs :

$$A^{(m+1)}(a_1, \dots, a_{m+1}) = A^{(2)}(A^{(m)}(a_1, \dots, a_m), a_{m+1})$$

## Bisymétrie

### Définition.

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est **bisymétrique** si pour toute matrice carrée de  $\mathbb{R}^{(m \times m)}$  de

$$\text{terme général } a_{ij}' : A(A(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, A(a_{m1}, \dots, a_{mm})) =$$

$$A(A(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, A(a_{1m}, \dots, a_{mm}))$$

### Définition. (Suite bisymétrique)

La suite  $(A^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R})_{m \geq 1}$  est **bisymétrique** si  $\forall \mathbf{a} = (a) : A^{(1)}(\mathbf{a}) = a$  et si pour toute matrice de  $\mathbb{R}^{(p \times m)}$  de terme général  $a_{ij}' :$

$$A^{(p)}(A^{(m)}(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, A^{(m)}(a_{p1}, \dots, a_{pm})) =$$

$$A^{(m)}(A^{(p)}(a_{11}, \dots, a_{p1}), \dots, A^{(p)}(a_{1m}, \dots, a_{pm}))$$

- Cette propriété est caractéristique des opérateurs de type moyennes quasi-arithmétique et quasi-linéaire.

## Suite décomposable

### Définition. (Suite décomposable)

La suite  $(A^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R})_{m \geq 1}$  est **décomposable** si

$$\forall \mathbf{a} = (a) : A^{(1)}(\mathbf{a}) = a \text{ et si } \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m, \forall k = 1, \dots, m :$$

$$A^{(m)}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m) = A^{(m)}(\underbrace{A^{(k)}(a_1, \dots, a_k)}_{k \text{ fois}}, \underbrace{A^{(m-k)}(a_{k+1}, \dots, a_m)}_{m-k \text{ fois}})$$

- La définition est proche de celle de l'associativité sauf qu'ici les agrégations partielles sont dupliquées un nombre égal au nombre de valeurs agrégées.
- Cette propriété permet en particulier de caractériser les opérateurs de type moyenne quasi-arithmétique.

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
  - Introduction
  - Propriétés mathématiques élémentaires
  - Propriétés algébriques
  - Les moyennes
  - Les moyennes quasi-linéaires
  - Opérateurs OWA ("Ordered Weighted Averaging")
  - Poids dans les opérateurs WAM et OWA
  - Ensembles flous, t-normes et t-conormes
  - Intégrales de Choquet
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social

## Définition des moyennes quasi-arithmétiques

### Définition.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement monotone. Une **moyenne quasi-arithmétique** de générateur  $f$  est une fonction  $M_f^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$M_f^{(m)}(\mathbf{a}) = f^{-1} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(a_j) \right)$$

## Propriétés des moyennes quasi-arithmétiques

### Théorème.

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction **symétrique, continue, strict. croissante, idempotente et bisymétrique** ssi il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strict. monotone telle que  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  :

$$A(\mathbf{a}) = M_f(\mathbf{a}) = f^{-1} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(a_j) \right)$$

### Théorème.

La suite  $A^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est une **suite décomposable de fonctions symétriques, continues, strict. croissantes, idempotentes** ssi il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strict. monotone telle que  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  :

$$A^{(m)}(\mathbf{a}) = M_f^{(m)}(\mathbf{a}) = f^{-1} \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(a_j) \right)$$

- Ces moyennes sont des opérateurs d'agrégation **internes**.

## Exemples de moyennes quasi-arithmétiques

$f(x)$	$M_f^{(m)}(\mathbf{a})$	Nom
$x$	$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j$	Arithmétique
$x^2$	$\left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j^2 \right)^{1/2}$	Quadratique
$\log(x)$	$\left( \prod_{j=1}^m a_j \right)^{1/m}$	Géométrique
$x^{-1}$	$\left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j} \right)^{-1}$	Harmonique
$x^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}^*$ )	$\left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j^\alpha \right)^{1/\alpha}$	Puissance ( $\alpha$ )

## Propriétés des moyennes puissances

- La moyenne puissance  $M_{x^\alpha}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  est définie par :

$$\left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j^\alpha \right)^{1/\alpha}$$

- Ce type de moyenne possède les propriétés suivantes :

- $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} M_{x^\alpha}$  correspond au minimum
- Si  $\alpha = -1$  alors  $M_{x^\alpha}$  est la moyenne harmonique
- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} M_{x^\alpha}$  correspond à la moyenne géométrique
- Si  $\alpha = 1$  alors  $M_{x^\alpha}$  est la moyenne arithmétique
- Si  $\alpha = 2$  alors  $M_{x^\alpha}$  est la moyenne quadratique
- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} M_{x^\alpha}$  correspond au maximum
- Si  $\alpha \leq \alpha'$  alors  $M_{x^\alpha} \leq M_{x^{\alpha'}}$

## Exemple

Étudiants	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne arithmétique
<i>a</i>	15	16	13	11	$\frac{1}{4}(15 + 16 + 13 + 11) = 13.75$
<i>b</i>	12	13	12	16	$\frac{1}{4}(12 + 13 + 12 + 16) = 13.25$
<i>c</i>	12	17	14	12	$\frac{1}{4}(12 + 17 + 14 + 12) = 13.75$

- Symétrie :  $A(a_1, a_2, \dots, a_m) = A(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(m)})$ .
- Exemple, étudiant *a* :  $\mathbf{a} = (15, 16, 13, 11)$

$$\begin{aligned} AM(15, 16, 13, 11) &= \frac{1}{4}(15 + 16 + 13 + 11) \\ &= \frac{1}{4}(16 + 15 + 11 + 13) \\ &= AM(16, 15, 11, 13) = 13.75 \end{aligned}$$

## Exemple (suite)

Étudiants	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne arithmétique
<i>a</i>	15	16	13	11	$\frac{1}{4}(15 + 16 + 13 + 11) = 13.75$
<i>b</i>	12	13	12	16	$\frac{1}{4}(12 + 13 + 12 + 16) = 13.25$
<i>c</i>	12	17	14	12	$\frac{1}{4}(12 + 17 + 14 + 12) = 13.75$

- Suite Bisymétrique :  $A^{(p)}(A^{(m)}(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, A^{(m)}(a_{p1}, \dots, a_{pm})) = A^{(m)}(A^{(p)}(a_{11}, \dots, a_{p1}), \dots, A^{(p)}(a_{1m}, \dots, a_{pm}))$
- On agrège pour chaque ligne (étudiant) d'abord :
  - *a* :  $AM^{(4)}(15, 16, 13, 11) = 13.75$ .
  - *b* :  $AM^{(4)}(12, 13, 12, 16) = 13.25$ .
  - *c* :  $AM^{(4)}(12, 17, 14, 12) = 13.75$ .
- Puis on agrège les moyennes des étudiants  
 $AM^{(3)}(13.75, 13.25, 13.75) = 13.583$ .

## Exemple (suite)

Étudiants	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne arithmétique
<i>a</i>	15	16	13	11	$\frac{1}{4}(15 + 16 + 13 + 11) = 13.75$
<i>b</i>	12	13	12	16	$\frac{1}{4}(12 + 13 + 12 + 16) = 13.25$
<i>c</i>	12	17	14	12	$\frac{1}{4}(12 + 17 + 14 + 12) = 13.75$

- Idempotence :  $A(a, a, \dots, a) = a$
- Exemple :

$$\begin{aligned} AM(10, 10, 10, 10) &= \frac{1}{4}(10 + 10 + 10 + 10) \\ &= 10 \end{aligned}$$

## Exemple (suite)

Étudiants	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne arithmétique
<i>a</i>	15	16	13	11	$\frac{1}{4}(15 + 16 + 13 + 11) = 13.75$
<i>b</i>	12	13	12	16	$\frac{1}{4}(12 + 13 + 12 + 16) = 13.25$
<i>c</i>	12	17	14	12	$\frac{1}{4}(12 + 17 + 14 + 12) = 13.75$

- Suite Bisymétrique :  $A^{(p)}(A^{(m)}(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, A^{(m)}(a_{p1}, \dots, a_{pm})) = A^{(m)}(A^{(p)}(a_{11}, \dots, a_{p1}), \dots, A^{(p)}(a_{1m}, \dots, a_{pm}))$ .
- On agrège pour chaque colonne (matière) d'abord :
  - math. :  $AM^{(3)}(15, 12, 12) = 13$ .
  - info. :  $AM^{(3)}(16, 13, 17) = 15.3333$ .
  - phys. :  $AM^{(3)}(13, 12, 14) = 13$ .
  - litt. :  $AM^{(3)}(11, 16, 12) = 13$ .
- Puis on agrège les moyennes par matière :  
 $AM^{(4)}(13, 15.3333, 13, 13) = 13.583$ .

## Exemple (suite)

Étudiants	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne arithmétique
a	15	16	13	11	$\frac{1}{4}(15 + 16 + 13 + 11) = 13.75$
b	12	13	12	16	$\frac{1}{4}(12 + 13 + 12 + 16) = 13.25$
c	12	17	14	12	$\frac{1}{4}(12 + 17 + 14 + 12) = 13.75$

• Suite Décomposable :  $A^{(m)}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m) = A^{(m)}(\underbrace{A^{(k)}(a_1, \dots, a_k)}_{k \text{ fois}}, \underbrace{A^{(m-k)}(a_{k+1}, \dots, a_m)}_{m-k \text{ fois}})$ .

- Exemple étudiant a :  $\mathbf{a} = (15, 16, 13, 11)$

$$\begin{aligned} AM^{(4)}(15, 16, 13, 11) &= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}(15 + 16) + \frac{1}{2}(15 + 16) + \\ &\quad \frac{1}{2}(13 + 11) + \frac{1}{2}(13 + 11)) \\ &= AM^{(4)}(AM^{(2)}(15, 16), AM^{(2)}(15, 16), \\ &\quad AM^{(2)}(13, 11), AM^{(2)}(13, 11)) \\ &= 13.75 \end{aligned}$$

## Exemple (suite)

Et.	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne quadratique
a	15	16	13	11	$\sqrt{\frac{1}{4}(15^2 + 16^2 + 13^2 + 11^2)} = 13.883$
b	12	13	12	16	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 13^2 + 12^2 + 16^2)} = 13.351$
c	12	17	14	12	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 17^2 + 14^2 + 12^2)} = 13.901$

- Idempotence :  $A(a, a, \dots, a) = a$ .
- Exemple :

$$\begin{aligned} M_{x^2}(10, 10, 10, 10) &= \sqrt{\frac{1}{4}(10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^2)} \\ &= 10 \end{aligned}$$

## Exemple

Et.	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne quadratique
a	15	16	13	11	$\sqrt{\frac{1}{4}(15^2 + 16^2 + 13^2 + 11^2)} = 13.883$
b	12	13	12	16	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 13^2 + 12^2 + 16^2)} = 13.351$
c	12	17	14	12	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 17^2 + 14^2 + 12^2)} = 13.901$

- Symétrie :  $A(a_1, a_2, \dots, a_m) = A(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(m)})$ .
- Exemple étudiant a :  $\mathbf{a} = (15, 16, 13, 11)$ .

$$\begin{aligned} M_{x^2}(15, 16, 13, 11) &= \sqrt{\frac{1}{4}(15^2 + 16^2 + 13^2 + 11^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(16^2 + 15^2 + 11^2 + 13^2)} \\ &= M_{x^2}(16, 15, 11, 13) = 13.883 \end{aligned}$$

## Exemple (suite)

Et.	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne quadratique
a	15	16	13	11	$\sqrt{\frac{1}{4}(15^2 + 16^2 + 13^2 + 11^2)} = 13.883$
b	12	13	12	16	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 13^2 + 12^2 + 16^2)} = 13.351$
c	12	17	14	12	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 17^2 + 14^2 + 12^2)} = 13.901$

- Suite Bisymétrique :  $A^{(p)}(A^{(m)}(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, A^{(m)}(a_{p1}, \dots, a_{pm})) = A^{(m)}(A^{(p)}(a_{11}, \dots, a_{p1}), \dots, A^{(p)}(a_{1m}, \dots, a_{pm}))$ .
- On agrège pour chaque ligne (étudiant) d'abord :
- a :  $M_{x^2}^{(4)}(15, 16, 13, 11) = 13.883$ .
  - b :  $M_{x^2}^{(4)}(12, 13, 12, 16) = 13.351$ .
  - c :  $M_{x^2}^{(4)}(12, 17, 14, 12) = 13.901$ .
- Puis on agrège les moyennes des étudiants :
- $$M_{x^2}^{(3)}(13.883, 13.351, 13.901) = 13.714.$$

## Exemple (suite)

Et.	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne quadratique
a	15	16	13	11	$\sqrt{\frac{1}{4}(15^2 + 16^2 + 13^2 + 11^2)} = 13.883$
b	12	13	12	16	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 13^2 + 12^2 + 16^2)} = 13.351$
c	12	17	14	12	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 17^2 + 14^2 + 12^2)} = 13.901$

- Suite Bisymétrique :  $A^{(p)}(A^{(m)}(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, A^{(m)}(a_{p1}, \dots, a_{pm})) = A^{(m)}(A^{(p)}(a_{11}, \dots, a_{p1}), \dots, A^{(p)}(a_{1m}, \dots, a_{pm}))$ .
- On agrège pour chaque colonne (matière) d'abord :
  - math. :  $M_{x^2}^{(3)}(15, 12, 12) = 13.077$ .
  - info. :  $M_{x^2}^{(3)}(16, 13, 17) = 15.427$ .
  - phys. :  $M_{x^2}^{(3)}(13, 12, 14) = 13.026$ .
  - litt. :  $M_{x^2}^{(3)}(13, 12, 14) = 13.178$ .
- Puis on agrège les moyennes par matière :  $M_{x^2}^{(4)}(\dots) = 13.714$ .

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
  - Introduction
  - Propriétés mathématiques élémentaires
  - Propriétés algébriques
  - Les moyennes
  - Les moyennes quasi-linéaires
  - Opérateurs OWA ("Ordered Weighted Averaging")
  - Poids dans les opérateurs WAM et OWA
  - Ensembles flous, t-normes et t-conormes
  - Intégrales de Choquet
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social

## Exemple (suite)

Et.	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne quadratique
a	15	16	13	11	$\sqrt{\frac{1}{4}(15^2 + 16^2 + 13^2 + 11^2)} = 13.883$
b	12	13	12	16	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 13^2 + 12^2 + 16^2)} = 13.351$
c	12	17	14	12	$\sqrt{\frac{1}{4}(12^2 + 17^2 + 14^2 + 12^2)} = 13.901$

- Suite Décomposable :  $A^{(m)}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m) = A^{(m)}(\underbrace{A^{(k)}(a_1, \dots, a_k)}_{k \text{ fois}}, \underbrace{A^{(m-k)}(a_{k+1}, \dots, a_m)}_{m-k \text{ fois}})$ .
- Exemple étudiant a :  $\mathbf{a} = (15, 16, 13, 11)$

$$M_{x^2}^{(4)}(\mathbf{a}) = \sqrt{\frac{1}{4}((\sqrt{\frac{1}{3}(15^2 + 16^2 + 13^2)})^2 + (\sqrt{\frac{1}{3}(15^2 + 16^2 + 13^2)})^2 + (\sqrt{\frac{1}{3}(15^2 + 16^2 + 13^2)})^2 + (\sqrt{(11^2)})^2)}$$

$$M_{x^2}^{(4)}(\mathbf{a}) = M_{x^2}^{(3)}(15, 16, 13), M_{x^2}^{(1)}(11) = 13.883$$

## Définition des moyennes quasi-linéaires

## Définition.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement monotone et soit  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  un vecteur de poids tel que  $\forall j : w_j \geq 0$  et  $\sum_j w_j = 1$ . Une **moyenne quasi-linéaire** de générateur  $f$  et associée au vecteur de poids  $\mathbf{w}$  est une fonction  $M_{f, \mathbf{w}}^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$M_{f, \mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{a}) = f^{-1} \left( \sum_{j=1}^m w_j f(a_j) \right)$$

- Ces opérateurs étendent les moyennes quasi-arithmétiques en permettant de pondérer chaque valeur partielle par un poids non uniforme.
- Le cas particulier  $f(x) = x$  correspond à la moyenne arithmétique pondérée et sera noté  $WAM_{\mathbf{w}}$  ("Weighted Arithmetic Mean").

## Exemples de moyennes quasi-linéaires

$f(x)$	$M_f^{(m)}(\mathbf{a})$	Nom de la moy. <b>pondérée</b>
$x$	$\sum_{j=1}^m w_j a_j$	Arithmétique
$x^2$	$\left(\sum_{j=1}^m w_j a_j^2\right)^{1/2}$	Quadratique
$\log(x)$	$\prod_{j=1}^m a_j^{w_j}$	Géométrique
$x^{-1}$	$\left(\sum_{j=1}^m w_j \frac{1}{a_j}\right)^{-1}$	Harmonique
$x^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}^*$ )	$\left(\sum_{j=1}^m w_j a_j^\alpha\right)^{1/\alpha}$	Puissance ( $\alpha$ )

## Exemple

Soit le vecteur de poids suivant  $\mathbf{w} = (3/10, 4/10, 2/10, 1/10)$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne arith. pondérée
$a$	15	16	13	11	$\frac{3}{10}15 + \frac{4}{10}16 + \frac{2}{10}13 + \frac{1}{10}11 = 14.6$
$b$	12	13	12	16	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}13 + \frac{2}{10}12 + \frac{1}{10}16 = 12.8$
$c$	12	17	14	12	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}17 + \frac{2}{10}14 + \frac{1}{10}12 = 14.4$
$d$	11	18	10	9	$\frac{3}{10}11 + \frac{4}{10}18 + \frac{2}{10}10 + \frac{1}{10}9 = 13.4$

- Non symétrie :  $A(a_1, a_2, \dots, a_m) \neq A(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(m)})$ .
- Exemple Étudiant  $a$  :  $\mathbf{a} = (15, 16, 13, 11)$

$$M_{x,\mathbf{w}}(15, 16, 13, 11) = \underbrace{\frac{1}{10}(3 * 15 + 4 * 16 + 2 * 13 + 11)}_{14.6}$$

$$\neq \underbrace{\frac{1}{10}(3 * 16 + 4 * 15 + 2 * 11 + 13)}_{14.3}$$

## Propriétés des moyennes quasi-linéaires

## Théorème.

$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction **continue, strictement croissante, idempotente et bisymétrique** ssi il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone et des nombres réels  $w_1, \dots, w_m \geq 0$  vérifiant  $\sum_j w_j = 1$  tels que  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  :

$$A(\mathbf{a}) = M_{f,\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = f^{-1} \left( \sum_{j=1}^m w_j f(a_j) \right)$$

- A la différence des moyennes quasi-arithmétiques, les moyennes quasi-linéaires ne sont pas symétriques ni ne forment des suites décomposables.

## Exemple (suite)

Soit le vecteur de poids suivant  $\mathbf{w} = (3/10, 4/10, 2/10, 1/10)$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne arith. pondérée
$a$	15	16	13	11	$\frac{3}{10}15 + \frac{4}{10}16 + \frac{2}{10}13 + \frac{1}{10}11 = 14.6$
$b$	12	13	12	16	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}13 + \frac{2}{10}12 + \frac{1}{10}16 = 12.8$
$c$	12	17	14	12	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}17 + \frac{2}{10}14 + \frac{1}{10}12 = 14.4$
$d$	11	18	10	9	$\frac{3}{10}11 + \frac{4}{10}18 + \frac{2}{10}10 + \frac{1}{10}9 = 13.4$

- Idempotence :  $A(a, a, \dots, a) = a$
- Exemple :

$$M_{x,\mathbf{w}}(10, 10, 10, 10) = \frac{3}{10}10 + \frac{4}{10}10 + \frac{2}{10}10 + \frac{1}{10}10$$

$$= 10$$

## Exemple (suite)

Soit le vecteur de poids suivant  $\mathbf{w} = (3/10, 4/10, 2/10, 1/10)$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne arith. pondérée
a	15	16	13	11	$\frac{3}{10}15 + \frac{4}{10}16 + \frac{2}{10}13 + \frac{1}{10}11 = 14.6$
b	12	13	12	16	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}13 + \frac{2}{10}12 + \frac{1}{10}16 = 12.8$
c	12	17	14	12	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}17 + \frac{2}{10}14 + \frac{1}{10}12 = 14.4$
d	11	18	10	9	$\frac{3}{10}11 + \frac{4}{10}18 + \frac{2}{10}10 + \frac{1}{10}9 = 13.4$

- Bisymétrie :  $A(A(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, A(a_{m1}, \dots, a_{mm})) = A(A(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, A(a_{1m}, \dots, a_{mm}))$ .
- On agrège pour chaque ligne (étudiant) d'abord :
  - a :  $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(15, 16, 13, 11) = 14.6$ .
  - b :  $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(12, 13, 12, 16) = 12.8$ .
  - c :  $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(12, 17, 14, 12) = 14.4$ .
  - d :  $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(11, 18, 10, 9) = 13.4$ .
- Puis on agrège les moyennes des étudiants :  
 $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(14.6, 12.8, 14.4, 13.4) = 13.72$ .

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
  - Introduction
  - Propriétés mathématiques élémentaires
  - Propriétés algébriques
  - Les moyennes
  - Les moyennes quasi-linéaires
  - Opérateurs OWA ("Ordered Weighted Averaging")
  - Poids dans les opérateurs WAM et OWA
  - Ensembles flous, t-normes et t-conormes
  - Intégrales de Choquet

- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social

## Exemple (suite)

Soit le vecteur de poids suivant  $\mathbf{w} = (3/10, 4/10, 2/10, 1/10)$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	Moyenne arith. pondérée
a	15	16	13	11	$\frac{3}{10}15 + \frac{4}{10}16 + \frac{2}{10}13 + \frac{1}{10}11 = 14.6$
b	12	13	12	16	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}13 + \frac{2}{10}12 + \frac{1}{10}16 = 12.8$
c	12	17	14	12	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}17 + \frac{2}{10}14 + \frac{1}{10}12 = 14.4$
d	11	18	10	9	$\frac{3}{10}11 + \frac{4}{10}18 + \frac{2}{10}10 + \frac{1}{10}9 = 13.4$

- Bisymétrie :  $A(A(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, A(a_{m1}, \dots, a_{mm})) = A(A(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, A(a_{1m}, \dots, a_{mm}))$ .
- On agrège pour chaque colonne (matière) d'abord :
  - math. :  $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(15, 12, 12, 10) = 12.8$ .
  - info. :  $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(16, 13, 17, 18) = 15.2$ .
  - phys. :  $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(13, 12, 14, 10) = 12.5$ .
  - litt. :  $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(13, 12, 14, 9) = 13$ .
- Puis on agrège les moyennes par matière :  
 $M_{x,\mathbf{w}}^{(4)}(12.8, 15.2, 12.5, 13) = 13.72$ .

## Définition des opérateurs OWA

## Définition.

Soit  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  un vecteur de poids tel que  $\forall j : w_j \geq 0$  et  $\sum_j w_j = 1$ . Une **fonction moyenne ordonnée (OWA - "Ordered Weighted Averaging")** associée au vecteur de poids  $\mathbf{w}$  est une fonction  $OWA_{\mathbf{w}}^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$OWA_{\mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m w_j a_{\tau(j)}$$

où  $\tau$  est une permutation de  $\Pi^m$  telle que

$$a_{\tau(1)} \leq a_{\tau(2)} \leq a_{\tau(3)} \leq \dots \leq a_{\tau(m)}.$$

- Contrairement aux moyennes quasi-linéaires, les opérateurs OWA permettent de pondérer les valeurs partielles en fonction de leur rang lorsque celles-ci sont ordonnées dans l'ordre croissant.

## Propriétés des opérateurs OWA

- Les opérateurs OWA définissent des fonctions d'agrégation **symétriques, continues, strictement croissantes, idempotentes**.
- Il s'agit par ailleurs de fonctions d'agrégation **internes**.

## Propriétés des opérateurs OWA (suite)

- Les opérateurs OWA vont du min au max en passant entre autres par les statistiques d'ordre.
- Il s'agit d'une fonction interne pouvant se rapprocher d'un comportement conjonctif ou disjonctif.
- Pour quantifier cet aspect on définit le degré de "orness" du paramètre  $\mathbf{w}$  :

$$\text{orness}(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^m w_j \frac{j-1}{m-1}$$

- Cet indicateur varie entre 0 et 1. Plus il est grand, plus l'opérateur OWA se rapproche d'un comportement disjonctif.
- Dans le cas de poids uniforme (moyenne arithmétique), l'indice vaut 0.5.

## Propriétés des opérateurs OWA (suite)

- $OWA_{\mathbf{w}}^{(m)}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m w_j a_{\tau(j)}$  où  $a_{\tau(1)} \leq a_{\tau(2)} \leq a_{\tau(3)} \leq \dots \leq a_{\tau(m)}$
- OWA est une famille paramétrée qui généralise certains opérateurs.
- Selon la définition de  $\mathbf{w}$  nous retrouvons :

$\mathbf{w}$	Nom de l'opérateur
$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_j = 0 \text{ si } j \neq 1 \end{cases}$	Minimum
$\begin{cases} w_m = 1 \\ w_j = 0 \text{ si } j \neq m \end{cases}$	Maximum
$\begin{cases} w_{\frac{m+1}{2}} = 1 & \text{si } m \text{ est impair} \\ w_{\frac{m}{2}} = 1/2 \text{ et } w_{\frac{m}{2}+1} = 1/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ w_j = 0 & \text{sinon} \end{cases}$	Médiane
$\begin{cases} w_k = 1 \\ w_j = 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$	Statistique d'ordre $k$
$\forall j : w_j = \frac{1}{m}$	Moyenne arithmétique

## Exemple

Soit le vecteur de poids suivant  $\mathbf{w} = (3/10, 4/10, 2/10, 1/10)$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$OWA_{\mathbf{w}}$
$a$	15	16	13	11	$\frac{3}{10}11 + \frac{4}{10}13 + \frac{2}{10}15 + \frac{1}{10}16 = 13.1$
$b$	12	13	12	16	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}12 + \frac{2}{10}13 + \frac{1}{10}16 = 12.6$
$c$	12	17	14	12	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}12 + \frac{2}{10}14 + \frac{1}{10}17 = 12.9$

- Symétrie :  $A(a_1, a_2, \dots, a_m) = A(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(m)})$
- Exemple étudiant  $a$  :  $\mathbf{a} = (15, 16, 13, 11)$

$$\begin{aligned} OWA_{\mathbf{w}}(15, 16, 13, 11) &= OWA_{\mathbf{w}}(11, 13, 15, 16) \\ &= 13.1 \end{aligned}$$



## Exemple (suite)

Soit le vecteur de poids suivant  $\mathbf{w} = (3/10, 4/10, 2/10, 1/10)$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$OWA_{\mathbf{w}}$
<i>a</i>	15	16	13	11	$\frac{3}{10}11 + \frac{4}{10}13 + \frac{2}{10}15 + \frac{1}{10}16 = 13.1$
<i>b</i>	12	13	12	16	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}12 + \frac{2}{10}13 + \frac{1}{10}16 = 12.6$
<i>c</i>	12	17	14	12	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}12 + \frac{2}{10}14 + \frac{1}{10}17 = 12.9$

- Idempotence :  $A(a, a, \dots, a) = a$
- Exemple :

$$\begin{aligned} OWA_{\mathbf{w}}(10, 10, 10, 10) &= \frac{3}{10}10 + \frac{4}{10}10 + \frac{2}{10}10 + \frac{1}{10}10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
  - Introduction
  - Propriétés mathématiques élémentaires
  - Propriétés algébriques
  - Les moyennes
  - Les moyennes quasi-linéaires
  - Opérateurs OWA ("Ordered Weighted Averaging")
  - Poids dans les opérateurs WAM et OWA
  - Ensembles flous, t-normes et t-conormes
  - Intégrales de Choquet
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social

## Exemple (suite)

Soit le vecteur de poids suivant  $\mathbf{w} = (3/10, 4/10, 2/10, 1/10)$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$OWA_{\mathbf{w}}$
<i>a</i>	15	16	13	11	$\frac{3}{10}11 + \frac{4}{10}13 + \frac{2}{10}15 + \frac{1}{10}16 = 13.1$
<i>b</i>	12	13	12	16	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}12 + \frac{2}{10}13 + \frac{1}{10}16 = 12.6$
<i>c</i>	12	17	14	12	$\frac{3}{10}12 + \frac{4}{10}12 + \frac{2}{10}14 + \frac{1}{10}17 = 12.9$

- $orness(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^m w_j \frac{j-1}{m-1}$

$$\begin{aligned} orness(3/10, 4/10, 2/10, 1/10) &= \frac{1}{4-1} \left( \frac{3}{10}0 + \frac{4}{10}1 + \frac{2}{10}2 + \frac{1}{10}3 \right) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

- Pour comparaison, dans le cas d'une moyenne arithmétique :

$$\begin{aligned} orness(1/4, 1/4, 1/4, 1/4) &= \frac{1}{4-1} \left( \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3) \right) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

## Signification des vecteurs poids pour WAM et OWA en pratique

- Les opérateurs  $WAM_{\mathbf{w}}$  et  $OWA_{\mathbf{w}}$  utilisent tous deux un système de pondération mais leurs significations sont totalement différentes :
  - Pour *WAM* : les poids permettent de quantifier l'importance ou la fiabilité pour chaque attribut (critère, juge, expert, ...)
  - Pour *OWA* : les poids permettent de quantifier l'importance des valeurs partielles en fonction de leur position dans l'ordre croissant (indépendamment des attributs). Cet opérateur permet de donner plus d'importance aux petites valeurs ou aux grandes valeurs. Il permet aussi d'être moins sensible aux valeurs extrêmes.
- Toutefois, *WAM* et *OWA* décrivent tous deux des opérateurs de type **additif** et dans ce cas, nous ne prenons pas en compte les interactions entre critères. Nous verrons comment les généraliser par la suite.

## Rappel du Sommaire

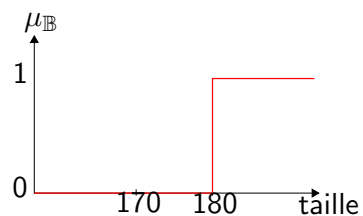
- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
  - Introduction
  - Propriétés mathématiques élémentaires
  - Propriétés algébriques
  - Les moyennes
  - Les moyennes quasi-linéaires
  - Opérateurs OWA ("Ordered Weighted Averaging")
  - Poids dans les opérateurs WAM et OWA
  - Ensembles flous, t-normes et t-conormes
  - Intégrales de Choquet
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social

### 4 Analyse relationnelle et ordres médians

## Exemple

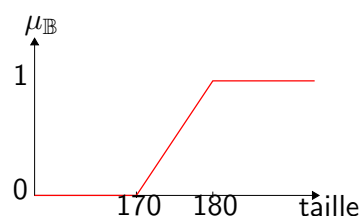
- Soit  $\mathbb{B}$  l'ensemble des "personnes grandes".
- Dans l'approche classique (booléenne) de la théorie des ensembles :

$$\begin{cases} \mu_{\mathbb{B}}(x) = 0 & \text{si } x < 180 \\ \mu_{\mathbb{B}}(x) = 1 & \text{si } x \geq 180 \end{cases}$$



- Dans l'approche floue de la théorie des ensembles :

$$\begin{cases} \mu_{\mathbb{B}}(x) = 0 & \text{si } x < 170 \\ \mu_{\mathbb{B}}(x) = \frac{x-170}{10} & \text{si } 170 \leq x < 180 \\ \mu_{\mathbb{B}}(x) = 1 & \text{si } x \geq 180 \end{cases}$$



## Introduction aux ensembles flous

- Soit  $\mathbb{B}$  un ensemble et soit  $\mu_{\mathbb{B}}$  la fonction d'appartenance associée.
- Dans l'approche classique (booléenne) de la théorie des ensembles :

$$\mu_{\mathbb{B}}(x) \in \{0, 1\} \text{ avec } \begin{cases} \mu_{\mathbb{B}}(x) = 1 & \text{si } x \text{ appartient à } \mathbb{B} \\ \mu_{\mathbb{B}}(x) = 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à } \mathbb{B} \end{cases}$$

- **Dans l'approche floue de la théorie des ensembles :**

$$\mu_{\mathbb{B}}(x) \in [0, 1]$$

- Les (sous-)ensembles flous permettent de :
  - modéliser l'incertitude (de manière autre que les probabilités)
  - modéliser des notions vagues du langage naturel (de manière plus adéquate que les ensembles booléens)
  - modéliser des degrés graduels d'appartenance

## Opérations sur les ensembles flous : la négation

- Comme dans le cas des ensembles booléens, il existe des opérations logiques d'**union** (OU), d'**intersection** (ET) et de **négation** (NON) qui s'appliquent aux ensembles flous. Ceux-ci en revanche **ne sont pas uniques**.
- Dans le cas de la **négation**, nous utiliserons tout le temps l'opération  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  suivante :

$$N(\mu_{\mathbb{B}}(x)) = 1 - \mu_{\mathbb{B}}(x)$$

## Opérations sur les ensembles flous : t-normes

- Les normes triangulaires ou t-normes sont des opérateurs de **conjonction (intersection)** qui s'appliquent aux ensembles flous.

### Définition.

Une **t-norme** est une fonction  $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  qui est :

- symétrique** :  $\forall a, b \in [0, 1] : T(a, b) = T(b, a)$
- associative** :  $\forall a, b, c \in [0, 1] : T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$
- non décroissante** :  $\forall a \leq c, b \leq d : T(a, b) \leq T(c, d)$
- ayant 1 comme élément neutre** :  $\forall a \in [0, 1] : T(a, 1) = T(1, a) = a$

## Exemples de t-normes et t-conormes

Nom	t-norme	t-conorme
Min-Max (Zadeh)	$\min(a, b)$	$\max(a, b)$
Probabiliste	$ab$	$a + b - ab$
Lukasiewicz	$\max(a + b - 1, 0)$	$\min(a + b, 1)$
Drastique	$\begin{cases} a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

## Opérations sur les ensembles flous : t-conormes

- Les conormes triangulaires ou t-conormes sont des opérateurs de **disjonction (union)** qui s'appliquent aux ensembles flous.

### Définition.

Une **t-conorme** est une fonction  $T^* : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  qui est :

- symétrique** :  $\forall a, b \in [0, 1] : T^*(a, b) = T^*(b, a)$
- associative** :  $\forall a, b, c \in [0, 1] : T^*(T^*(a, b), c) = T^*(a, T^*(b, c))$
- non décroissante** :  $\forall a \leq c, b \leq d : T^*(a, b) \leq T^*(c, d)$
- ayant 0 comme élément neutre** :  $\forall a \in [0, 1] : T^*(a, 0) = T^*(0, a) = a$

- On associe à toute t-norme sa t-conorme (et vice-versa) selon la relation de De Morgan :

$$T^*(a, b) = N(T(N(a), N(b))) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$$

## t-normes et t-conormes comme opérateur d'agrégation

- $T$  et  $T^*$  permettent d'agréger des valeurs partielles qui appartiennent à  $[0, 1]$
- Jusqu'à présent :  $T$  et  $T^*$  seuls opérateurs qui soient **associatifs**
- L'agrégation de plusieurs valeurs partielles se fait incrémentalement :  $T(a, b, c, d) = T(T(T(a, b), c), d)$
- Propriétés des t-normes :  $\forall a, b \in [0, 1] : T(a, b) \leq \min(a, b)$ . Par conséquent les t-normes sont des fonctions d'agrégation **conjonctives**
- Propriétés des t-conormes :  $\forall a, b \in [0, 1] : T^*(a, b) \geq \max(a, b)$ . Par conséquent les t-conormes sont des fonctions d'agrégation **disjonctives**

## Opérateurs d'agrégation mixant t-normes et t-conormes

- $T$  et  $T^*$  étant respectivement des opérateurs conjonctif et disjonctif, ce sont des fonctions représentant des "ET" et des "OU" et donc des "points de vue extrêmes".
- On pourra prendre alors une combinaison de  $T$  et  $T^*$  pour balancer les effets des deux opérateurs :
  - "Exponential Compensatory operator" :  

$$EC_{T,T^*,\lambda}(\mathbf{a}) = (T(a_1, \dots, a_m))^{1-\lambda} (T^*(a_1, \dots, a_m))^\lambda$$
 avec  $\lambda \in [0, 1]$
  - "Convex-Linear Compensatory operator" :  

$$CLC_{T,T^*,\lambda}(\mathbf{a}) = (1 - \lambda)T(a_1, \dots, a_m) + \lambda T^*(a_1, \dots, a_m)$$
 avec  $\lambda \in [0, 1]$

## Exemple

- On divise les notes par 20 pour se ramener à une échelle entre  $[0, 1]$ .
- Prenons le cas  $T = \min$  et  $T^* = \max$  et  $\lambda = 0.5$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$CLC_{\min, \max, 0.5}$
$a$	0.75	0.8	0.65	0.55	$0.5 \min(\mathbf{a}) + 0.5 \max(\mathbf{a}) = 0.675$
$b$	0.6	0.65	0.6	0.8	$0.5 \min(\mathbf{a}) + 0.5 \max(\mathbf{a}) = 0.7$
$c$	0.6	0.85	0.7	0.6	$0.5 \min(\mathbf{a}) + 0.5 \max(\mathbf{a}) = 0.725$

- Symétrie :  $A(a_1, a_2, \dots, a_m) = A(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(m)})$
- Exemple étudiant  $a$  :  $\mathbf{a} = (0.75, 0.8, 0.65, 0.55)$  :
  - $\min(0.75, 0.8, 0.65, 0.55) = \min(0.75, 0.65, 0.55, 0.8) = 0.55$
  - $\max(0.75, 0.8, 0.65, 0.55) = \max(0.65, 0.75, 0.55, 0.8) = 0.8$
  - $CLC_{T,T^*,0.5}(0.75, 0.8, 0.65, 0.55) = CLC_{T,T^*,0.5}(0.65, 0.75, 0.55, 0.8) = 0.675$

## Propriétés des opérateurs d'agrégation mixant t-normes et t-conormes

- Les opérateurs  $EC$  et  $CLC$  sont :
  - **symétriques**
  - **non décroissants**
  - **idempotents ssi  $T = \min$  et  $T^* = \max$**
  - **non associatifs** (sauf si  $\lambda \in \{0, 1\}$ )

## Exemple (suite)

- On divise les notes par 20 pour se ramener à une échelle entre  $[0, 1]$ .
- Prenons le cas  $T = \min$  et  $T^* = \max$  et  $\lambda = 0.5$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$CLC_{\min, \max, 0.5}$
$a$	0.75	0.8	0.65	0.55	$0.5 \min(\mathbf{a}) + 0.5 \max(\mathbf{a}) = 0.675$
$b$	0.6	0.65	0.6	0.8	$0.5 \min(\mathbf{a}) + 0.5 \max(\mathbf{a}) = 0.7$
$c$	0.6	0.85	0.7	0.6	$0.5 \min(\mathbf{a}) + 0.5 \max(\mathbf{a}) = 0.725$

- Idempotence :  $A(a, a, \dots, a) = a$
- Exemple :
  - $\min(0.5, 0.5, 0.5, 0.5) = 0.5$
  - $\max(0.5, 0.5, 0.5, 0.5) = 0.5$
  - $CLC_{T,0.5}(0.5, 0.5, 0.5, 0.5) = 0.5$

## Exemple (suite)

- On divise les notes par 20 pour se ramener à une échelle entre  $[0, 1]$ .
- Prenons le cas  $T = \min$  et  $T^* = \max$  et  $\lambda = 0.5$ .

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$CLC_{\min, \max, 0.5}$
a	0.75	0.8	0.65	0.55	$0.5 \min(\mathbf{a}) + 0.5 \max(\mathbf{a}) = 0.675$
b	0.6	0.65	0.6	0.8	$0.5 \min(\mathbf{a}) + 0.5 \max(\mathbf{a}) = 0.7$
c	0.6	0.85	0.7	0.6	$0.5 \min(\mathbf{a}) + 0.5 \max(\mathbf{a}) = 0.725$

- Associativité et non associativité :  $A^{(m)}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m) = A^{(2)}(A^{(k)}(a_1, \dots, a_k), A^{(m-k)}(a_{k+1}, \dots, a_m))$
- Exemple étudiant  $a$  :  $\mathbf{a} = (0.75, 0.8, 0.65, 0.55)$  :
  - $\min(0.75, 0.8, 0.65, 0.55) = \min(\min(\min(0.75, 0.8), 0.65), 0.55) = 0.55$
  - $\max(0.75, 0.8, 0.65, 0.55) = \max(\max(\max(0.75, 0.8), 0.65), 0.55) = 0.8$
  - $CLC_{T, T^*, 0.5}(0.75, 0.8, 0.65, 0.55) \neq CLC_{T, T^*, 0.5}(CLC_{T, T^*, 0.5}(CLC_{T, T^*, 0.5}(0.75, 0.8), 0.65), 0.55)$

## Préambule : les mesures floues

## Définition.

Une mesure floue sur  $\mathbb{C} = \{1, 2, \dots, m\}$  est une fonction d'ensemble  $\mu : \mathbb{P}(\mathbb{C}) \rightarrow [0, 1]$  qui est **monotone**, càd  $\forall S \subseteq T : \mu(S) \leq \mu(T)$ , et vérifie les conditions suivantes :  $\mu(\emptyset) = 0$  et  $\mu(\mathbb{C}) = 1$ .

a. Ensemble des parties de  $\mathbb{C}$

- Dans notre contexte,  $\forall S \subseteq \mathbb{C}$ ,  $\mu(S)$  représente le **poids** ou l'**importance** de la **combinaison des attributs** (ou critères) de  $S$ .

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
  - Introduction
  - Propriétés mathématiques élémentaires
  - Propriétés algébriques
  - Les moyennes
  - Les moyennes quasi-linéaires
  - Opérateurs OWA ("Ordered Weighted Averaging")
  - Poids dans les opérateurs WAM et OWA
  - Ensembles flous, t-normes et t-conormes
  - Intégrales de Choquet
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social

## 4 Analyse relationnelle et ordres médians

## Exemple

- $\mathbb{C} = \{\text{math.}, \text{info.}, \text{phys.}, \text{litt.}\}$ .

	Éléments de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$	Mesure floue
1	$S = \emptyset$	$\mu(S) = 0$
2	$S = \{\text{math.}\}$	$\mu(S) = 0.3$
3	$S = \{\text{info.}\}$	$\mu(S) = 0.4$
4	$S = \{\text{phys.}\}$	$\mu(S) = 0.2$
5	$S = \{\text{litt.}\}$	$\mu(S) = 0.1$
6	$S = \{\text{math.}, \text{info.}\}$	$\mu(S) = 0.5$
7	$S = \{\text{math.}, \text{phys.}\}$	$\mu(S) = 0.4$
8	$S = \{\text{math.}, \text{litt.}\}$	$\mu(S) = 0.65$
9	$S = \{\text{info.}, \text{phys.}\}$	$\mu(S) = 0.5$
10	$S = \{\text{info.}, \text{litt.}\}$	$\mu(S) = 0.7$
11	$S = \{\text{phys.}, \text{litt.}\}$	$\mu(S) = 0.6$
12	$S = \{\text{math.}, \text{info.}, \text{phys.}\}$	$\mu(S) = 0.55$
13	$S = \{\text{math.}, \text{info.}, \text{litt.}\}$	$\mu(S) = 0.9$
14	$S = \{\text{math.}, \text{phys.}, \text{litt.}\}$	$\mu(S) = 0.75$
15	$S = \{\text{info.}, \text{phys.}, \text{litt.}\}$	$\mu(S) = 0.8$
16	$S = \{\text{math.}, \text{info.}, \text{phys.}, \text{litt.}\}$	$\mu(S) = 1$

## Définition des intégrales de Choquet

### Définition.

Soit  $\mu$  une mesure floue sur  $\mathbb{C}$ . L'intégrale de Choquet par rapport à  $\mu$  est une fonction  $C_\mu : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$C_\mu(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m a_{\tau(j)} [\mu(\{\tau(j), \dots, \tau(m)\}) - \mu(\{\tau(j+1), \dots, \tau(m)\})]$$

où  $\tau$  est une permutation de  $\Pi^m$  telle que

$$a_{\tau(1)} \leq a_{\tau(2)} \leq a_{\tau(3)} \leq \dots \leq a_{\tau(m)}.$$

- Par exemple, si pour  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , nous avons  $a_3 \leq a_1 \leq a_2$  (càd  $\tau(1) = 3; \tau(2) = 1; \tau(3) = 2$ ) alors nous avons :

$$\begin{aligned} C_\mu(\mathbf{a}) &= a_3[\mu(\{3, 1, 2\}) - \mu(\{1, 2\})] \\ &\quad + a_1[\mu(\{1, 2\}) - \mu(\{2\})] \\ &\quad + a_2[\mu(\{2\})] \end{aligned}$$

## Propriétés des intégrales de Choquet (suite)

- $C_\mu(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m a_{\tau(j)} [\mu(\{\tau(j), \dots, \tau(m)\}) - \mu(\{\tau(j+1), \dots, \tau(m)\})]$  où  $a_{\tau(1)} \leq a_{\tau(2)} \leq a_{\tau(3)} \leq \dots \leq a_{\tau(m)}$ . Selon la définition de la mesure floue  $\mu$  nous avons les cas suivants :

$\mu$	Nom de l'opérateur
$\begin{cases} \mu(S) = 1 & \text{si } S = \mathbb{C} \\ \mu(S) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$	Minimum
$\begin{cases} \mu(S) = 0 & \text{si } S = \emptyset \\ \mu(S) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$	Maximum
$\begin{cases} \mu(S) = 0 & \text{si }  S  \leq m - k \\ \mu(S) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$	Statistique d'ordre $k$
$\mu(S) = \frac{ S }{m}$	Moyenne arithmétique
$\mu(S) = \sum_{j \in S} \mu(\{j\})$ (mesure additive) avec $\mu(\{j\}) = w_j$	$WAM_w$
$\mu(S) = \sum_{j=0}^{ S -1} \mu(\{m-j\})$ (mesure additive) avec $\mu(\{m-j\}) = w_{m-j}$	$OWA_w$

## Propriétés des intégrales de Choquet

- Les intégrales de Choquet définissent des fonctions d'agrégation **symétriques, continues, non décroissantes, idempotentes**.
- Il s'agit par ailleurs de fonctions d'agrégation **internes**.

## Propriétés des intégrales de Choquet (suite)

- Les intégrales de Choquet généralisent les opérateurs *WAM* et *OWA*. Ces derniers correspondent à des mesures floues qui sont des **mesures additives** :  $\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$ . Dans ce cas particulier, les attributs sont **indépendants**.
- Les intégrales de Choquet dans le cas de **mesures non additives**, permettent de tenir compte des **interactions entre attributs**.
- Cas de critères **redondants** :

$$\mu(S \cup T) < \mu(S) + \mu(T)$$

- Cas de critères **complémentaires** :

$$\mu(S \cup T) > \mu(S) + \mu(T)$$

## Exemple

	Éléments de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$	Mesure floue
1	$S = \emptyset$	$\mu(S) = 0$
2	$S = \{\text{math.}\}$	$\mu(S) = 0.3$
3	$S = \{\text{info.}\}$	$\mu(S) = 0.4$
4	$S = \{\text{phys.}\}$	$\mu(S) = 0.2$
5	$S = \{\text{litt.}\}$	$\mu(S) = 0.1$
6	$S = \{\text{math., info.}\}$	$\mu(S) = 0.5$
7	$S = \{\text{math., phys.}\}$	$\mu(S) = 0.4$
8	$S = \{\text{math., litt.}\}$	$\mu(S) = 0.65$
9	$S = \{\text{info., phys.}\}$	$\mu(S) = 0.5$
10	$S = \{\text{info., litt.}\}$	$\mu(S) = 0.7$
11	$S = \{\text{phys., litt.}\}$	$\mu(S) = 0.6$
12	$S = \{\text{math., info., phys.}\}$	$\mu(S) = 0.55$
13	$S = \{\text{math., info., litt.}\}$	$\mu(S) = 0.9$
14	$S = \{\text{math., phys., litt.}\}$	$\mu(S) = 0.75$
15	$S = \{\text{info., phys., litt.}\}$	$\mu(S) = 0.8$
16	$S = \{\text{math., info., phys., litt.}\}$	$\mu(S) = 1$

## Exemple (suite)

- Posons math. $\leftrightarrow$ 1, info. $\leftrightarrow$ 2, phys. $\leftrightarrow$ 3, litt. $\leftrightarrow$ 4.

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$C_\mu$
a	0.75	0.8	0.65	0.55	0.675
b	0.6	0.65	0.6	0.8	0.65
c	0.6	0.85	0.7	0.6	0.71
d	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75

- $C_\mu(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m a_{\tau(j)} [\mu(\{\tau(j), \dots, \tau(m)\}) - \mu(\{\tau(j+1), \dots, \tau(m)\})]$
- Étudiant b :  $\mathbf{b} = (0.6, 0.65, 0.6, 0.8)$  et  $\tau = (1, 3, 2, 4)$  :

$$\begin{aligned}
 C_\mu(\mathbf{b}) &= 0.6[\mu(\{1, 3, 2, 4\}) - \mu(\{3, 2, 4\})] + 0.6[\mu(\{3, 2, 4\}) - \mu(\{2, 4\})] \\
 &\quad + 0.65[\mu(\{2, 4\}) - \mu(\{4\})] + 0.8[\mu(\{4\})] \\
 &= 0.6[1 - 0.8] + 0.6[0.8 - 0.7] + 0.65[0.7 - 0.1] + 0.8[0.1] \\
 &= 0.65
 \end{aligned}$$

## Exemple

- Posons math. $\leftrightarrow$ 1, info. $\leftrightarrow$ 2, phys. $\leftrightarrow$ 3, litt. $\leftrightarrow$ 4.

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$C_\mu$
a	0.75	0.8	0.65	0.55	0.675
b	0.6	0.65	0.6	0.8	0.65
c	0.6	0.85	0.7	0.6	0.71
d	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75

- $C_\mu(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m a_{\tau(j)} [\mu(\{\tau(j), \dots, \tau(m)\}) - \mu(\{\tau(j+1), \dots, \tau(m)\})]$
- Étudiant a :  $\mathbf{a} = (0.75, 0.8, 0.65, 0.55)$  et  $\tau = (4, 3, 1, 2)$  :

$$\begin{aligned}
 C_\mu(\mathbf{a}) &= 0.55[\mu(\{4, 3, 1, 2\}) - \mu(\{3, 1, 2\})] + 0.65[\mu(\{3, 1, 2\}) - \mu(\{1, 2\})] \\
 &\quad + 0.75[\mu(\{1, 2\}) - \mu(\{2\})] + 0.8[\mu(\{2\})] \\
 &= 0.55[1 - 0.55] + 0.65[0.55 - 0.5] + 0.75[0.5 - 0.4] + 0.8[0.4] \\
 &= 0.675
 \end{aligned}$$

## Exemple (suite)

- Posons math. $\leftrightarrow$ 1, info. $\leftrightarrow$ 2, phys. $\leftrightarrow$ 3, litt. $\leftrightarrow$ 4.

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$C_\mu$
a	0.75	0.8	0.65	0.55	0.675
b	0.6	0.65	0.6	0.8	0.65
c	0.6	0.85	0.7	0.6	0.71
d	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75

- $C_\mu(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m a_{\tau(j)} [\mu(\{\tau(j), \dots, \tau(m)\}) - \mu(\{\tau(j+1), \dots, \tau(m)\})]$
- Étudiant c :  $\mathbf{c} = (0.6, 0.85, 0.7, 0.6)$  et  $\tau = (1, 4, 3, 2)$  :

$$\begin{aligned}
 C_\mu(\mathbf{c}) &= 0.6[\mu(\{1, 4, 3, 2\}) - \mu(\{4, 3, 2\})] + 0.6[\mu(\{4, 3, 2\}) - \mu(\{3, 2\})] \\
 &\quad + 0.7[\mu(\{3, 2\}) - \mu(\{2\})] + 0.85[\mu(\{2\})] \\
 &= 0.6[1 - 0.8] + 0.6[0.8 - 0.5] + 0.7[0.5 - 0.4] + 0.85[0.4] \\
 &= 0.71
 \end{aligned}$$

## Exemple (suite)

- Posons math. $\leftrightarrow$ 1, info. $\leftrightarrow$ 2, phys. $\leftrightarrow$ 3, litt. $\leftrightarrow$ 4.

Et.	math.	info.	phys.	litt.	$C_\mu$
<i>a</i>	0.75	0.8	0.65	0.55	0.675
<i>b</i>	0.6	0.65	0.6	0.8	0.65
<i>c</i>	0.6	0.85	0.7	0.6	0.71
<i>d</i>	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75

- $C_\mu(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m a_{\tau(j)} [\mu(\{\tau(j), \dots, \tau(m)\}) - \mu(\{\tau(j+1), \dots, \tau(m)\})]$
- Étudiant *d* (idempotence) :  $\mathbf{d} = (0.75, 0.75, 0.75, 0.75)$  et  $\tau = (1, 2, 3, 4)$  :

$$\begin{aligned}
 C_\mu(\mathbf{d}) &= 0.75[\mu(\{1, 2, 3, 4\}) - \mu(\{2, 3, 4\})] + 0.75[\mu(\{2, 3, 4\}) - \mu(\{3, 4\})] \\
 &\quad + 0.75[\mu(\{3, 4\}) - \mu(\{4\})] + 0.75[\mu(\{4\})] \\
 &= 0.75[1 - 0.8] + 0.75[0.8 - 0.6] + 0.75[0.6 - 0.1] + 0.75[0.1] \\
 &= 0.75
 \end{aligned}$$

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
  - Introduction et notations
  - Quelques procédures de vote et leurs limites
  - Le théorème d'impossibilité d'Arrow
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Introduction

- Le problème d'agrégation des préférences est très proche de la théorie des votes et de façon plus large la théorie du choix social (TCS)
- Lors d'une élection, les alternatives sont les candidats et les votants des "critères"
- Etant donné les préférences individuelles de chaque votant comment **agréger** celles-ci afin d'aboutir à un vainqueur du scrutin ou de façon plus général à une préférence collective ?
- Un système électoral peut donc être vu comme un procédé d'agrégation
- Les débuts de la théorie des votes ou du choix social remontent aux 18ème siècle sous l'impulsion des travaux de Condorcet et de ceux de Borda
- Les résultats théoriques de ces disciplines apportent un regard autre mais complémentaire sur le problème d'agrégation des préférences



## Principales sources du cours

- D. Bouyssou, T. Marchant et P. Perny, Théorie du choix social et aide multicritère à la décision. *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision*. Hermès. 2006.
- D. Felsenthal and M. Machover. *Electoral Systems. Paradoxes, Assumptions, and Procedures*. Springer. 2012.
- W. Gaertner. *A Primer in Social Choice Theory*. Oxford University Press. 2006.

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
  - Introduction et notations
  - Quelques procédures de vote et leurs limites
  - Le théorème d'impossibilité d'Arrow
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Notations et formalisation du problème

- Dans cette partie du cours, nous supposons essentiellement que les relations de préférences sont des ordres totaux (sans ex-aequo)
- L'ensemble des candidats est  $\mathbb{A} = \{a, b, c, \dots\}$  avec  $|\mathbb{A}| = n$
- L'ensemble des votants est  $\mathbb{C} = \{1, 2, 3, \dots, m\}$  avec  $|\mathbb{C}| = m$
- On remarquera dans ce cadre particulier  $m$  est en général beaucoup plus grand  $n$
- Nous supposons que chaque votant  $j$  à une relation de préférence  $R^j$  que l'on exprimera de la façon suivante :

$$aR^j bR^j cR^j d \Leftrightarrow a \succeq b \succeq c \succeq d$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est classé 1er} \\ b \text{ est classé 2nd} \\ c \text{ est classé 3ème} \\ d \text{ est classé 4ème} \end{cases}$$

- **Comment déterminer le vainqueur d'un scrutin ?**

## Introduction

- Nous allons présenter quelques systèmes électoraux (procédure de vote ou d'agrégation) bien connus et illustrer sur des exemples les biais de ces méthodes
- Nous considérons deux types de procédure de vote :
  - les systèmes électoraux **uninominaux** : voter consiste uniquement à désigner le nom d'un candidat
  - les systèmes électoraux **par listes ordonnées** : voter consiste à donner une liste ordonnée des candidats
- La procédure de vote peut également consister :
  - soit à désigner un unique vainqueur
  - soit à désigner plusieurs vainqueurs
  - soit à établir une liste ordonnée

## Systèmes uninominaux

- Dans ce cas chaque votant donne le candidat qu'il classe en premier
- Néanmoins, pour illustrer certains paradoxes ou propriétés, on supposera que chaque votant a une relation de préférence complète sur l'ensemble des candidats
- Nous supposons aussi que chaque votant est **sincère** et que son vote reflète véritablement ses préférences
- Nous étudions 2 systèmes classiques :
  - Le système britannique : **système majoritaire à un tour** (SM1T) ("plurality voting"). Le candidat qui obtient le plus de votes est élu
  - Le système français : **système majoritaire à deux tours** (SM2T) ("plurality voting with runoff"). Au premier tour, si le candidat qui obtient le plus de votes atteint une majorité absolue (plus de 50% des voix) alors il est élu. Sinon, on a recourt à un second tour comprenant les 2 meilleurs candidats du premier tour. A l'issue de ce second tour, le candidat ayant eu le plus de voix l'emporte (il a dans ce cas nécessairement une majorité absolue de voix)

## Exemple : "Majorité et le SM1T"

- Supposons 3 candidats  $\{a, b, c\}$  et 21 votants dont les préférences sont les suivantes :

10 votants ont les préférences  $aRbRc$   
 6 votants ont les préférences  $bRcRa$   
 5 votants ont les préférences  $cRbRa$

- Le SM1T donne  $a$  vainqueur avec 10 voix sur un total de 21
- Quelques remarques :
  - $a$  est élu sans atteindre une majorité absolue
  - Mais une majorité des votants (11/21) préfèrent  $b$  à  $a$  !
  - Il en va de même pour le candidat  $c$  !
- Le SM2T donne à l'issue du 1er tour  $a$  avec 10 voix et  $b$  avec 6 voix. Puis au 2nd tour,  $b$  l'emporte avec 11 voix contre 10 pour  $a$
- Quelques remarques :
  - SM1T et SM2T ne donnent pas le même vainqueur !
  - Est-ce que SM2T est meilleur que SM1T ?

## Exemple : "Dictature de la majorité"

- Supposons 26 candidats  $\{a, b, \dots, z\}$  et 100 votants dont les préférences sont les suivantes :

51 votants ont les préférences  $aRbRcR \dots RyRz$   
 49 votants ont les préférences  $zRbRcR \dots RyRa$

- Le SM1T donne  $a$  vainqueur avec 51 voix contre 49 voix pour  $z$
- Quelques remarques :
  - $a$  a une majorité absolue mais quand même, 49 votants sont complètement contre ce candidat
  - Par ailleurs, le candidat  $b$  est bien rangé parmi l'ensemble des votants et aurait pu être un "bon compromis"
  - Cette procédure peut donc conduire à un résultat ne favorisant pas le compromis

## Exemple : "Majorité et le SM2T"

- Supposons 4 candidats  $\{a, b, c, d\}$  et 21 votants dont les préférences sont les suivantes :

10 votants ont les préférences  $bRaRdRc$   
 6 votants ont les préférences  $cRaRdRb$   
 5 votants ont les préférences  $aRdRbRc$

- Au 1er tour, le SM2T donne  $b$  avec 10 voix et  $c$  avec 6 voix
- Puis au 2nd tour, le SM2T donne  $b$  vainqueur avec 15 voix contre 6 pour  $c$
- Quelques remarques :
  - Une majorité de votants (11/21) préfèrent  $a$  à  $b$  !
  - Une majorité de votants (11/21) préfèrent  $d$  à  $b$  !
  - Ni  $a$  ni  $d$  sont passés au 2nd tour
  - Donc le SM2T présente également des imperfections vis à vis de la notion de la majorité

## Exemple : "Vote utile et sincérité des candidats"

- Nous supposons comme précédemment la situation suivante :
  - 10 votants ont les préférences  $bRaRdRc$
  - 6 votants ont les préférences  $cRaRdRb$
  - 5 votants ont les préférences  $aRdRbRc$
- Supposons que certains votants décident de ne pas voter sincèrement :
  - 6 votants décident de voter  $aRcRdRb$  au lieu de  $cRaRdRb$
- Ce comportement traduit un **vote utile** en faveur du candidat  $a$
- Dans ce cas, le SM2T donne  $a$  vainqueur dès le 1er tour avec une majorité absolue (11/21) de voix !
- Remarque :
  - Ces votants "non sincères" au 1er tour parviennent à faire élire  $a$  au lieu de  $b$  (ce qui se serait passé avec des préférences sincères)
  - Leur stratégie "paye" puisqu'ils préfèrent sincèrement  $a$  à  $b$
  - Donc le SM2T n'incite pas tous les votants à révéler leurs vrais préférences. On parle de procédure **manipulable**

## Exemple : "Monotonie et SM2T" (suite)

- Après la campagne on aboutit alors aux préférences suivantes :
  - 8 votants ont les préférences  $aRbRc$
  - 5 votants ont les préférences  $cRaRb$
  - 4 votants ont les préférences  $bRcRa$
- Au 1er tour, le SM2T donne  $a$  avec 8 voix et  $c$  avec 5 voix
- Au 2nd tour, le SM2T donne  $c$  vainqueur avec 9 voix contre 8 voix pour  $a$
- Remarque :
  - Le candidat  $a$  a réussi à éliminer le candidat  $b$  au 1er tour
  - Mais il perd les élections au 2nd tour face à  $c$  !
  - Alors qu'avant la campagne le candidat  $a$  pouvait gagner l'élection face à  $b$  au 2nd tour, après la campagne et malgré plus d'électeurs en sa faveur, il perd l'élection face à  $c$  au 2nd tour !
  - On peut donc manipuler le SM2T en votant "non sincèrement"
  - On dit que la procédure est **non monotone** (proche du concept de non décroissance des fonctions d'agrégation)

## Exemple : "Monotonie et SM2T"

- Supposons 3 candidats  $\{a, b, c\}$  et 17 votants dont les préférences sont les suivantes :
  - 6 votants ont les préférences  $aRbRc$
  - 5 votants ont les préférences  $cRaRb$
  - 4 votants ont les préférences  $bRcRa$
  - 2 votants ont les préférences  $bRaRc$
- Au 1er tour, le SM2T donnerait  $a$  avec 6 voix et  $b$  avec 6 voix
- Au 2nd tour, le SM2T donnerait  $a$  vainqueur avec 11 voix contre 6 pour  $b$
- Supposons que pour renforcer sa victoire  $a$  décide de mener une campagne afin d'attirer davantage les votants de son candidat rival  $b$ . Son but est de faire changer d'avis les 2 votants dont les préférences initiales sont  $bRaRc$  et de les convaincre d'avoir les préférences  $aRbRc$ .

## Exemple : "Paradoxe du pêcheur à la ligne"

- Supposons 3 candidats  $\{a, b, c\}$  et 11 votants dont les préférences sont les suivantes :
  - 4 votants ont les préférences  $aRbRc$
  - 4 votants ont les préférences  $cRbRa$
  - 3 votants ont les préférences  $bRcRa$
- Au 1er tour, le SM2T donnerait  $a$  et  $c$  chacun avec 4 voix
- Au 2nd tour, le SM2T donnerait  $c$  vainqueur avec 7 voix contre 4 pour  $a$
- La victoire de  $c$  semblant facile, supposons que certains candidats décident d'aller pêcher et de ne pas voter. On a alors :
  - 2 votants ont les préférences  $aRbRc$
  - 4 votants ont les préférences  $cRbRa$
  - 3 votants ont les préférences  $bRcRa$
- Au 1er tour, le SM2T donne  $c$  avec 4 voix et  $b$  avec 3 voix
- Au 2nd tour, le SM2T donne  $b$  vainqueur avec 5 voix contre 4 pour  $c$  !

## Exemple : “Paradoxe du pêcheur à la ligne” (suite)

- Quelques remarques :
  - Les pêcheurs ont non seulement profiter de la pêche mais ils ont fait basculer le scrutin en n'allant pas voter !
  - Cela montre que l'on peut manipuler le SM2T en n'allant pas voter
  - Une telle procédure n'incite pas à la **participation**

## Exemple : “Vote en sous-comités” (suite)

- Si on ne fait pas de distinction de ces zones et qu'on considère l'ensemble des préférences :

8 votants ont les préférences  $aRbRc$   
 6 votants ont les préférences  $bRaRc$   
 6 votants ont les préférences  $cRaRb$   
 3 votants ont les préférences  $bRcRa$   
 3 votants ont les préférences  $cRbRa$

- Le SM2T donne au 1er tour,  $b$  et  $c$  avec chacun 9 voix ! (donc  $a$  est éliminé)
- Le SM2T donne au 2nd tour,  $b$  vainqueur avec 17 voix contre 9
- Quelques remarques :
  - On s'attendait à ce que  $a$  l'emporte au niveau national
  - Cela montre que l'on peut manipuler le SM2T en découpant un territoire en des communes adéquates
  - Ce type de procédure est dit **non séparable** (proche du concept d'associativité des fonctions d'agrégation)

## Exemple : “Vote en sous-comités”

- Supposons 3 candidats  $\{a, b, c\}$  et 26 votants
- Supposons de plus que les votants sont de deux catégories distinctes :
  - 13 sont en zones urbaines et leurs préférences sont :
    - 4 votants ont les préférences  $aRbRc$
    - 3 votants ont les préférences  $bRaRc$
    - 3 votants ont les préférences  $cRaRb$
    - 3 votants ont les préférences  $cRbRa$
  - Si le scrutin se déroule uniquement en zone urbaine, le SM2T donne  $a$  vainqueur au 2nd tour
  - 13 sont en zones rurales et leurs préférences sont :
    - 4 votants ont les préférences  $aRbRc$
    - 3 votants ont les préférences  $cRaRb$
    - 3 votants ont les préférences  $bRcRa$
    - 3 votants ont les préférences  $bRaRc$
  - Si le scrutin se déroule uniquement en zone rurale, le SM2T donne  $a$  vainqueur au 2nd tour également

## Vote majoritaire

- Les exemples précédents utilisent au moins 3 candidats ( $n \geq 3$ )
- Si le choix doit se faire entre  $n = 2$  candidats :
  - Si le nombre de votants  $m$  est impaire, alors le vainqueur obtient nécessairement la majorité absolue
  - SM1T et SM2T sont équivalents et se réduisent au **vote majoritaire**
- Si  $n = 2$ , le vote majoritaire ne présente pas les paradoxes que nous venons de voir
- Dans le cas  $n \geq 3$ , peut-on se ramener à une succession de votes majoritaires entre paires de candidats ?

## Vote majoritaire en cascade

- Le vote majoritaire en cascade considère  $n - 1$  problèmes de votes à 2 candidats :
  - On choisit aléatoirement 2 candidats dans la liste  $\mathbb{A}$
  - On applique la vote majoritaire pour confronter les 2 candidats
  - Le vaincu est retiré de la liste des candidats
  - Le vainqueur est confronté à un nouveau candidat tiré aléatoirement parmi les restants
  - On réitère le vote majoritaire jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de candidat dans la liste
- Cette approche comporte également des inconvénients

## Exemple : "Unanimité et vote majoritaire en cascade"

- Supposons 4 candidats  $\{a, b, c, d\}$  et 3 votants avec les préférences suivantes :
  - 1 votant a les préférences  $bRaRdRc$
  - 1 votant a les préférences  $cRbRaRd$
  - 1 votant a les préférences  $aRdRcRb$
- Supposons de plus que l' "ordre du jour" est le suivant  $a, b, c, d$  :
  - Le vote majoritaire entre  $a$  et  $b$  donne  $b$  vainqueur
  - Le vote majoritaire entre  $b$  et  $c$  donne  $c$  vainqueur
  - Le vote majoritaire entre  $c$  et  $d$  donne  $d$  vainqueur
- $d$  est vainqueur alors que **tous** les votants préfèrent  $a$  à  $d$  !
- Une telle procédure ne respecte pas le principe d'**unanimité**
- SM1T et SM2T respectent en revanche le principe d'unanimité

## Exemple : "Influence de l'ordre du jour"

- Supposons 3 candidats  $\{a, b, c\}$  et 3 votants avec les préférences suivantes :
  - 1 votant a les préférences  $aRbRc$
  - 1 votant a les préférences  $bRcRa$
  - 1 votant a les préférences  $cRaRb$
- Supposons de plus que l' "ordre du jour" est le suivant  $a, b, c$  :
  - Le vote majoritaire entre  $a$  et  $b$  donne  $a$  vainqueur
  - Le vote majoritaire entre  $a$  et  $c$  donne  $c$  vainqueur
- Supposons maintenant que l' "ordre du jour" est le suivant  $c, b, a$  :
  - Le vote majoritaire entre  $c$  et  $b$  donne  $b$  vainqueur
  - Le vote majoritaire entre  $b$  et  $a$  donne  $a$  vainqueur !
- L'ordre du jour a donc un impact sur l'issue de cette procédure de vote
- Une telle méthode est dite **non neutre** (proche du concept de symétrie des fonctions d'agrégation -mais sur les candidats-)
- SM1T et SM2T sont en revanche neutres

## Systèmes par "listes ordonnées"

- Les systèmes uninomiaux vus précédemment présentent de nombreux inconvénients
- Les systèmes à "listes ordonnées" tentent de faire mieux en exigeant des votants plus d'information sur leurs préférences (l'idée alors est qu'on pourrait limiter -voire éliminer?- ces inconvénients)
- Dans ce cas chaque votant donne un **classement de tous les candidats**
- Le problème devient un problème d'agrégation de listes ordonnées permettant :
  - soit de déterminer le ou les vainqueurs
  - soit de déterminer un classement collectif ou global

## Méthode de Condorcet

- Condorcet propose en 1785 la **règle de la majorité par paire (RMP)** : pour chaque paire de candidats  $(a, b)$ , on prendra  $a$  collectivement préféré à  $b$ , si le nombre de votants ayant classé  $a$  avant  $b$  est strictement supérieur au nombre de votants ayant classé  $b$  avant  $a$ . S'il y a autant de votants supportant  $a \succeq b$  que de votant supportant  $b \succeq a$  alors on prendra  $a$  collectivement indifférent à  $b$
- Le **principe de Condorcet** est alors le suivant : s'il existe un candidat qui est préféré à chacun des autres candidats en utilisant la RMP, c'est ce candidat qu'il faut élire. Ce candidat est appelé **vainqueur de Condorcet** et il est nécessairement unique

## L'effet Condorcet

- Le principe de Condorcet semble tout à fait naturel
- Mais le vainqueur de Condorcet n'existe pas toujours !
- Condorcet a mis en évidence un paradoxe qui explique les limites de sa méthode
- Supposons 3 candidats  $\{a, b, c\}$  et 3 votants avec les préférences :
 

1	votant a les préférences	$aRbRc$
1	votant a les préférences	$bRcRa$
1	votant a les préférences	$cRaRb$
- La RMP donne  $a \succeq b$ ,  $b \succeq c$  et  $c \succeq a$
- Il n'y a donc pas de vainqueur de Condorcet
- Au niveau collectif, on observe un cycle  $a \succeq b \succeq c \succeq a$  et une relation non transitive (alors que chaque relation individuelle était transitive)
- C'est ce qu'on appelle **l'effet ou le paradoxe de Condorcet**

## Exemple : "Principe de Condorcet et SM1T"

- Supposons 3 candidats  $\{a, b, c\}$  et 21 votants dont les préférences sont les suivantes :
 

10	votants ont les préférences	$aRbRc$
6	votants ont les préférences	$bRcRa$
5	votants ont les préférences	$cRbRa$
- SM1T donne  $a$  vainqueur
- La RMP donne notamment :
  - $b \succeq a$  (11 contre 10)
  - $b \succeq c$  (16 contre 5)
- Donc le vainqueur de Condorcet est ici  $b$  !
- A fortiori SM2T ne vérifie pas le principe de Condorcet non plus

## Méthode de Borda

- Borda propose en 1781 une autre méthode que l'on appellera **règle de Borda (RB)**. La méthode consiste à donner un score global à chaque candidat étant donné les rangs donnés par chaque votant. Pour chaque paire de candidats  $(a, b)$ , on prendra  $a$  collectivement préféré à  $b$ , si la somme des rangs de  $a$  dans les listes des votants est strictement inférieure à celle de  $b$ . Si on suppose que les ordres sont complets et sans ex-aequo alors le premier de la liste reçoit un score de 1, le deuxième un score de 2 ...
- Par exemple, si la liste ordonnée est  $aRbRc$  alors  $a$  a un score de 1,  $b$  un score de 2 et  $c$  un score de 3. On attribue ce type de score pour chaque votant puis on somme ces scores pour chaque candidats. Ce score agrégé donne alors le classement (le plus petit score étant le vainqueur)

## Exemple : “Méthode de Borda et de Condorcet”

- Supposons 4 candidats  $\{a, b, c, d\}$  et 3 votants dont les préférences sont les suivantes :

2 votants ont les préférences  $bRaRcRd$   
 1 votant a les préférences  $aRcRdRb$

- La RB donne les scores globaux suivants :

$$\begin{aligned} a &= 2 + 2 + 1 = 5 \\ b &= 1 + 1 + 4 = 6 \\ c &= 3 + 3 + 2 = 8 \\ d &= 4 + 4 + 3 = 11 \end{aligned}$$

- La RB donne  $a$  vainqueur
- La RMP donne  $b$  vainqueur car  $b \succeq a \succeq c \succeq d$  (2 contre 1 pour chaque paire)
- Donc la méthode de Borda ne vérifie pas le principe de Condorcet

## Exemple : “Méthode de Borda et condition d’indépendance”

- Reprenons l’exemple précédent pour lequel la RB a donné  $a$  vainqueur :

2 votants ont les préférences  $bRaRcRd$   
 1 votants ont les préférences  $aRcRdRb$

- Supposons que  $c$  et  $d$  décident de retirer leur candidature on a :

2 votants ont les préférences  $bRa$   
 1 votants ont les préférences  $aRb$

- La RB donne alors un autre vainqueur  $b!$  (alors que la place relative de ces candidats au sein des listes n’a pas changé)
- Ce problème sera formalisé dans la section suivante sous le nom d’**indépendance (vis à vis des alternatives tierces)**

## Avantages et inconvénient de la méthode de Borda

- La RB possède les avantages suivants :
  - Elle permet toujours de désigner un ou plusieurs vainqueurs (la RMP ne conduisant pas toujours à un vainqueur de Condorcet)
  - Elle permet d’obtenir au niveau collectif une liste ordonnée (pas de problème de transitivité)
  - Elle permet de tenir compte des ex-aequo (même si on a supposé des ordres totaux sans ex-aequo précédemment)
  - Elle vérifie les propriétés suivantes : neutralité, anonymat, séparabilité, monotonie et incitation à la participation (donc les systèmes par “listes ordonnées” présentent des avantages vis à vis des systèmes uninominaux)
- Elle possède néanmoins un inconvénient sérieux : le résultat collectif obtenu entre deux candidats  $a$  et  $b$ , dépend non seulement de la place relative de ces deux candidats au sein des listes ordonnées individuelles mais également de la place relative que  $a$  et  $b$  ont vis à vis des autres candidats  $c, d, \dots$

## Sur les procédures de vote

- L’idéal serait une méthode qui allie les avantages de la RMP (principe de Condorcet) et ceux de la RB tout en évitant les problèmes de chacune de ces procédures à savoir la non transitivité (effet Condorcet) et la dépendance vis à vis des place relatives de chaque paire de candidat vis à vis des autres
- Par ailleurs, les méthodes vues jusqu’à présent tentent d’élire par défaut un seul vainqueur. Nous pouvons imaginer un système “à la proportionnelle” dont l’issue serait la mise en place d’une **assemblée représentative**
- Mais il existe également des situations paradoxales pour les systèmes “à la proportionnelle”
- Comme nous avons pu le constater, le problème d’agrégation de préférences par une procédure de vote démocratique est un problème difficile. Dans la section suivante dédiée à la TCS, on verra que l’on peut formaliser cette difficulté

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
  - Introduction et notations
  - Quelques procédures de vote et leurs limites
  - Le théorème d'impossibilité d'Arrow
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Axiomes d'Arrow

- Arrow s'est intéressé aux procédures d'agrégation  $A$  vérifiant les 5 conditions suivantes :
  - **Universalité** : tout préordre de  $\mathbb{PO}(A)$  est admissible (tout votant peut exprimer tout type de préordre possible)
  - **Transitivité** : le résultat de  $A$  doit être un préordre complet (le résultat doit permettre de déterminer un ou des vainqueurs ainsi qu'un classement des tous les candidats)
  - **Unanimité** : le résultat de  $A$  ne doit pas contredire un avis unanime des votants (si tous les votants préfèrent  $a$  à  $b$  il ne peut en être autrement en ce qui concerne le choix collectif)
  - **Indépendance** (vis à vis des candidats tierces) : le résultat de  $A$  concernant la comparaison entre deux candidats  $a$  et  $b$  ne dépend que de leur position relative dans les préordres des votants (la RB ne vérifie pas cet axiome)
  - **Non dictature** : il n'existe pas de votant qui puisse imposer ses préférences individuelles à tous les autres votants
- Question d'Arrow : **Existe-t-il une méthode d'agrégation  $A$  permettant de satisfaire ces 5 conditions ?**

## Introduction

- K. Arrow est le Nobel en économie de 1972, prix qu'il reçoit pour sa contribution à la TCS et pour son fameux théorème d'impossibilité énoncé en 1951 (puis à nouveau en 1963)
- Ce résultat a eu beaucoup d'impact dans de nombreuses disciplines : sciences économiques, sciences politiques, théories de la décision, ...
- Le problème initial auquel s'intéresse Arrow est similaire à l'agrégation de listes ordonnées : on cherche à agréger  $n \geq 3$  préordres totaux notés  $(R^1, \dots, R^n)$  en un préordre total collectif noté  $\succeq$ , par le biais d'une procédure d'agrégation  $A$
- Les préférences sont représentées ici sous forme de relations binaires. Notons  $\mathbb{PO}(A)$  l'ensemble des préordres possibles d'un ensemble de candidats  $A$
- On cherche donc une **procédure d'agrégation**  $A$  telle que :

$$A : \begin{array}{l} \mathbb{PO}(A)^n \rightarrow \mathbb{PO}(A) \\ (R^1, \dots, R^n) \rightarrow \succeq \end{array}$$

## Formalisation des axiomes d'Arrow

- Pour étudier la question d'Arrow, il est nécessaire de formaliser mathématiquement ces axiomes
- Rappelons qu'étant donné une relation binaire  $R$ ,  $I$  désigne sa partie symétrique et  $P$  sa partie asymétrique
- **Universalité** :  $A$  doit donner un résultat pour tout élément de  $\mathbb{PO}(A)^n$  ( $A$  est une fonction définie sur  $\mathbb{PO}(A)^n$  tout entier)
- **Transitivité** :  $A$  doit donner un résultat appartenant à  $\mathbb{PO}(A)$  ( $A$  est une fonction à valeur dans  $\mathbb{PO}(A)$  tout entier)
- **Unanimité** :  $A$  est tel que :  $\forall a, b ((\forall i \in \mathbb{C} : aP^i b) \Rightarrow a \succ b)$
- **Indépendance** :  $A$  est tel que pour tout  $(R^1, \dots, R^n), (R'^1, \dots, R'^n) \in \mathbb{PO}(A)$  et pour tout  $a, b \in A$  :  $\forall i ((aR^i b \Leftrightarrow aR'^i b) \wedge (bR^i a \Leftrightarrow bR'^i a)) \Rightarrow (a \succeq b \wedge a \succeq' b)$
- **Non dictature** :  $A$  est tel que pour tout  $i \in \mathbb{C}$  et pour tout  $a, b \in A$  :  $\exists (R^1, \dots, R^n) \in \mathbb{PO}(A)^n : aP^i b \wedge b \succeq a$



## Théorème d'impossibilité d'Arrow

### Théorème.

Si le nombre de votants  $m$  est fini, dès lors que le nombre de candidats  $n$  est supérieur ou égale à 3, il n'existe aucune méthode d'agrégation  $A$  qui satisfasse simultanément les conditions d'universalité, de transitivité, d'unanimité, d'indépendance et de non dictature

- Ce résultat théorique permet de mieux comprendre les inconvénients soulevés pour chaque procédure de vote dans les exemples précédents
- La méthode de Condorcet (RMP) vérifie l'universalité, l'unanimité, l'indépendance, la non dictature mais pas la transitivité (effet Condorcet)
- La méthode de Borda (RB) vérifie l'universalité, la transitivité, l'unanimité, la non dictature mais pas l'indépendance
- Ainsi si  $A$  devait satisfaire les conditions d'universalité, de transitivité, d'unanimité et d'indépendance, alors  $A$  serait dictée par un seul individu !

## Exemple : "Préférence collective Lukasiewicz-transitive"

- Soit  $\forall a, b : R(a, b) \in [0, 1]$  le degré d'appartenance de  $(a, b)$  à  $\succeq$
- Si  $\succeq$  est Lukasiewicz-transitive alors  $\forall a, b, c :$

$$R(a, b) + R(b, c) - 1 \leq R(a, c)$$

- Supposons 3 candidats  $\{a, b, c\}$  et  $3k$  votants avec les préférences :

$k$  votants ont les préférences  $aRbRc$   
 $k$  votants ont les préférences  $bRcRa$   
 $k$  votants ont les préférences  $cRaRb$

- Soit la relation floue collective  $\succeq$  définie par :

$$R(a, b) = \frac{|\{i \in \mathbb{C} : aR^i b\}|}{n}$$

- $\succeq$  ainsi définie vérifie la Lukasiewicz-transitivité mais elle présente des effets Condorcet puisque dans l'exemple on a  $R(a, b) = 2/3$   
 $R(b, c) = 2/3$  et  $R(c, a) = 2/3$  (résultat inexploitable en pratique)

## Quelques développements autour du théorème d'Arrow

- Peut-on faire mieux si on affaiblit la condition de transitivité de  $\succeq$  ?
  - $\succeq$  quasi-transitive (transitivité de  $\succ$ ) au lieu de  $\succeq$  transitive : on montre alors que  $A$  est dictée par une oligarchie
  - $\succeq$  sans cycle au lieu de  $\succeq$  transitive : on montre alors qu'il peut exister un votant ayant un droit de veto absolu
- Peut-on faire mieux si on avait des relations de préférences individuelles et/ou collective floues ?
  - Pour des préférences floues, alors chaque paire  $(a, b)$  a un degré d'appartenance à  $R$ , noté  $R(a, b)$ , à valeur dans  $[0, 1]$
  - Pour des préférences floues la propriété de transitivité se généralise au concept de  $T$ -transitivité où  $T$  est une t-norme
  - Si la préférence collective  $\succeq$  est floue, alors :
    - Si la  $T$ -transitivité est très stricte (t-norme proche du min), on retombe sur des résultats d'impossibilité de déterminer un vainqueur ou un classement
    - Si la  $T$ -transitivité est très faible, on obtient des résultats de possibilités mais qui permettent des effets Condorcet

## Quelques développements autour du théorème d'Arrow (suite)

- Parmi les axiomes d'Arrow, celui sur l'indépendance est le plus contesté
- Peut-on faire mieux si on affaiblit la condition d'indépendance de  $\succeq$  ?
  - En remplaçant la condition d'indépendance par une version plus faible appelée : "local stability" par H.P. Young ou "indépendance partielle" par P. Michaud, on montre qu'il existe une procédure de vote satisfaisant aux 4 autres conditions d'Arrow
  - Cette procédure de vote est suggérée par Condorcet lui-même !
  - Nous voyons dans la section suivante une formalisation de cette procédure

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians

## Introduction

- L'Analyse Relationnelle (AR) est une approche développée initialement par J.F. Marcotorchino et P. Michaud à la fin des années 1970 au centre scientifique d'IBM et qui repose sur les travaux de Condorcet
- Permet de donner une méthode de calcul pour la règle de Condorcet globale apportant une solution efficace au problème d'agrégation de relations de préférence
- Cette approche s'intéresse à d'autres types de problèmes connexes :
  - L'AR s'appuie sur des outils de la théorie des graphes de l'algèbre relationnelle, des statistiques et de la programmation linéaire (en nombres entiers)
  - l'AR permet de modéliser et de proposer une méthode de résolution du problème général de l'agrégation de relations binaires et notamment l'agrégation de partitions menant à une formalisation du problème de classification automatique

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians
  - Introduction et notations
  - Choix d'une bonne règle pour la décision collective et AR
  - Méthode de calcul dans le cadre de l'AR
  - Cas et propriétés particuliers
  - Cas général

## Principales sources du cours

- J.F. Marcotorchino et P. Michaud, Modèles d'optimisation en analyse des données relationnelles. *Math. Sci. Hum.*. Vol 67. 1979.
- P. Michaud, Hommage à Condorcet. *Etudes du Centre Scientifique d'IBM France*. 1985.
- H.P. Young, Condorcet's Theory of Voting. *American Political Science Review*. 1988.
- O. Hudry, B. Leclerc, B. Monjardet et J.P. Barthélémy, Médianes , Métriques et Laticielles. *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision*. Hermès. 2006.
- J. Ah-Pine et J.F. Marcotorchino, Overview of the Relational Analysis approach in Data-Mining and Multi-criteria Decision Making. *Web Intelligence and Intelligent Agents*. Intech. 2010.

## Représentation des relations de préférence en AR

- Dans l'approche condorcéenne sur laquelle se bâtit l'AR, on représente les relations de préférence par des **matrices de comparaison par paires** que l'on nommera également **matrices relationnelles individuelles**.
- Soit  $R$  une relation de préférence sur un ensemble  $\mathbb{A} = \{a, b, \dots\}$  d'alternatives de cardinal  $|\mathbb{A}| = n$ . Sa **matrice relationnelle** associée, notée  $\mathbf{R}$ , est sa représentation matricielle (CM1). Il s'agit d'une **matrice carrée binaire** de taille  $n \times n$  de terme général :

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } aRb \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Exemple (matrices relationnelles - suite)

- Les matrices relationnelles de deux autres exemples :

- $R^3 : aI^3bR^3cR^3d$  ce qui donne :

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b \\ c \\ d \end{array}$$

- $R^4 : dR^4bR^4cR^4a$  ce qui donne :

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ b \\ c \\ d \end{array}$$

## Exemple de matrices relationnelles

- Les matrices relationnelles de deux exemples :

- $R^1 : aR^1bR^1cR^1d$  ce qui donne :

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b \\ c \\ d \end{array}$$

- $R^2 : aR^2cR^2bR^2d$  ce qui donne :

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b \\ c \\ d \end{array}$$

## Matrice relationnelle collective

### Définition.

- Soient  $n$  candidats et  $m$  votants. Soit  $\mathbf{R}^k$  la matrice relationnelle codant la relation de préférence sous-jacente au votant  $k$  avec  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ .
- On définit la **matrice relationnelle collective** des  $\mathbf{R}^k$ , la matrice carrée d'ordre  $n$  notée  $\mathbf{C}$  sommant les matrices relationnelles individuelles  $\mathbf{R}^k$  et dont le terme général vaut :

$$\mathbf{C}_{ab} = \sum_{k=1}^m \mathbf{R}_{ab}^k$$

- $\mathbf{C}_{ab}$  est égal au nombre de votants supportant la relation  $a \succeq b$ .
- Comme  $\forall k; \forall (a, b) : \mathbf{R}_{ab}^k \in \{0, 1\}$  on a  $\mathbf{C}_{ab} \in \{0, \dots, m\}$ .

## Exemple de matrice relationnelle collective

- Soit les matrices relationnelles individuelles suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R^1}; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R^2}; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R^3}; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{R^4}$$

- La matrice relationnelle collective est alors :

$$C = \sum_{k=1}^4 R^k = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & 4 & 3 & 3 & 3 \\ b & 2 & 4 & 3 & 3 \\ c & 1 & 1 & 4 & 3 \\ d & 1 & 1 & 1 & 4 \end{matrix}$$

- Par exemple  $C_{bc} = 3$  car il y a 3 votants pour lesquels  $b \succeq c$ .

## Choix d'une bonne règle pour la détermination d'une relation de préférence collective

- Dans le cadre de l'AR, les matrices relationnelles individuelles et collective permettent d'agréger les relations de préférences.
- Maintenant comment déterminer à partir de  $C$ , une relation d'ordre qui résume les relations de préférences individuelles ? Autrement dit quelle serait une **bonne règle** permettant de déterminer une **relation de préférence collective** ?

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians
  - Introduction et notations
  - Choix d'une bonne règle pour la décision collective et AR
  - Méthode de calcul dans le cadre de l'AR
  - Cas et propriétés particuliers
  - Cas général

## Retour sur la règle de la majorité par paire

- Notons par  $X$  la matrice relationnelle représentant la relation collective issue d'une règle.
- La **règle de la majorité par paire (RMP)** proposée par Condorcet consiste, pour chaque paire d'alternatives (candidats)  $(a, b)$ , à prendre  $a \succeq b$  s'il y a plus d'attributs (votants) qui supportent la relation  $a \succeq b$  que d'attributs soutenant  $b \succeq a$ .
- Étant donnée une matrice relationnelle collective  $C$ , on définit formellement la relation collective  $X$  issue de la règle majoritaire par paire de la manière suivante,  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } C_{ab} \geq C_{ba} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Exemple (RMP)

- Dans le cadre de l'exemple précédent on a :

$$C = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & 4 & 3 & 3 & 3 \\ b & 2 & 4 & 3 & 3 \\ c & 1 & 1 & 4 & 3 \\ d & 1 & 1 & 1 & 4 \end{matrix}$$

- En appliquant la règle majoritaire par paire on obtient :

$$X = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

- Pour cet exemple la RMP donne un ordre total :  $a \succeq b \succeq c \succeq d$ .
- Mais rappelons que la relation collective n'est pas toujours transitive !

## "Effet Condorcet" dans le cadre du problème du triangle rectangle moyen (suite)

- Pour déterminer le "triangle rectangle moyen" on a d'abord proposé de résoudre le problème suivant :  
 minimiser :  $\sum_{i=1}^m (x - d_i)^2 + \sum_{i=1}^m (y - e_i)^2 + \sum_{i=1}^m (z - h_i)^2$   
 avec :  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
- La résolution du problème précédent aboutit à la définition du "triangle rectangle moyen" comme étant celui dont les côtés sont de longueurs issues des moyennes arithmétiques :  
 $x = \bar{d} = AM(d_1, \dots, d_m)$ ,  $y = \bar{e} = AM(e_1, \dots, e_m)$ ,  
 $z = \bar{h} = AM(h_1, \dots, h_m)$ .
- On obtient alors :  $\bar{d} = 7.5$ ,  $\bar{e} = 12$ ,  $\bar{h} = 15$ .
- Problème :  $\bar{d}^2 + \bar{e}^2 - \bar{h}^2 = -24.75 \neq 0$ .  
 Le triangle moyen n'est pas rectangle !

## Effet Condorcet dans le cadre du problème du triangle rectangle moyen

- Exemple issu de G. Guilbaud. *Éléments de la théorie des jeux*. Dunod. 1956
- Considérons les quatre triangles rectangles suivants où  $d_i, e_i, h_i$  représentent respectivement les longueurs du 1er, 2nd côtés et de l'hypoténuse du triangle  $T_i$  :
  - T1 :  $d_1 = 5, e_1 = 12, h_1 = 13$
  - T2 :  $d_2 = 15, e_2 = 8, h_2 = 17$
  - T3 :  $d_3 = 3, e_3 = 4, h_3 = 5$
  - T4 :  $d_4 = 7, e_4 = 24, h_4 = 25$
- Ces triangles sont rectangles car on a la propriété que  $d_i^2 + e_i^2 - h_i^2 = 0$ .

## Effet Condorcet dans le cadre du problème du triangle rectangle moyen (suite)

- En fait le problème est mal posé. Il faut contraindre le triangle moyen à respecter le théorème de Pythagore : cette propriété ne va pas émerger toute seule !
- Le problème bien posé est le suivant :  
 minimiser :  $\sum_{i=1}^m (x - d_i)^2 + \sum_{i=1}^m (y - e_i)^2 + \sum_{i=1}^m (z - h_i)^2$   
 s.l.c :  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$   
 avec :  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
- La résolution du problème précédent qui donne un véritable triangle rectangle moyen est :  $x = 7.062$ ,  $y = 11.3$  et  $z = 13.325$

## Règle de la majorité globale sous contraintes

- La **règle de la majorité globale sous contraintes (RMGC)** également proposée par Condorcet consiste à retenir **parmi toutes les relations d'ordre total<sup>2</sup> possibles celle qui est la plus supportée par l'ensemble des votants.**
- Étant données, une matrice relationnelle collective  $\mathbf{C}$  et une relation d'ordre total  $X$ , on détermine le nombre d'attributs supportant cette relation en calculant la quantité  $V$  suivante :

$$V(\mathbf{C}, X) = \sum_{(a,b):aXb} c_{ab}$$

- La RMGC consiste donc à résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & : V(\mathbf{C}, X) \\ \text{s.l.c} & : X \text{ est une relation d'ordre total} \end{array}$$

2. Pour rappel : relation binaire qui est réflexive, complète, transitive et antisymétrique

## Règle de la majorité globale sous contraintes (suite)

- La RMGC vérifie les conditions d'Arrow suivantes :
  - universalité
  - unanimité faible
  - non dictature
  - **transitivité**
- La condition d'indépendance vis à vis des alternatives tierces telle qu'énoncée par K. Arrow n'est pas vérifiée mais une condition plus souple intitulée **indépendance partielle<sup>3</sup>** est vérifiée.
- Relations entre RMP et RMGC :
  - Si pas d'effet Condorcet alors le résultat de RMGC coïncide avec le résultat de RMP
  - Si vainqueur de Condorcet alors il s'agit du premier classé par RMGC

3. P. Michaud, Hommage à Condorcet. *Etudes du Cent. Sci. d'IBM Fr.* 1985.

## Exemple (RMGC)

- Dans le cadre de l'exemple précédent on a :  $\mathbf{C} = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & 4 & 3 & 3 & 3 \\ b & 2 & 4 & 3 & 3 \\ c & 1 & 1 & 4 & 3 \\ d & 1 & 1 & 1 & 4 \end{matrix}$

- Si  $X^1 = d \succeq c \succeq b \succeq a$  :  $\mathbf{X}^1 = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 1 & 1 & 0 \\ d & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ ;  $V(\mathbf{C}, X^1) = 23$

- Si  $X^2 = a \succeq b \succeq c \succeq d$  :  $\mathbf{X}^2 = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ ;  $V(\mathbf{C}, X^2) = 34$

- $X^2$  est une meilleure solution que  $X^1$ .  $X^2$  est en fait l'optimum.

## Exemple (Liens entre RMP et RMGC)

- Dans le cadre de l'exemple précédent on a :

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & 4 & 3 & 3 & 3 \\ b & 2 & 4 & 3 & 3 \\ c & 1 & 1 & 4 & 3 \\ d & 1 & 1 & 1 & 4 \end{matrix}$$

- En appliquant la RMGC on obtient :

$$\mathbf{X}^* = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

- Cette solution est également celle obtenue par la RMP (car pas d'effet Condorcet). Par ailleurs le vainqueur de Condorcet est ici  $a$ .

## Complexité du calcul de la solution issue de la RMGC

- La règle majoritaire globale sous contraintes est une **bonne règle**.
- **Mais**, en l'état, elle n'est pas exploitable dans des cas pratiques dès que le nombre d'alternatives est supérieur à quelques unités.
- En effet, pour déterminer la solution du problème (1) il faut **énumérer l'ensemble des relations d'ordre total** sur  $\mathbb{A}$ . Il y a  $n!$  **solutions possibles** ! Il s'agit d'un problème **NP-complet**.
  - $4! = 24$
  - $5! = 120$
  - $7! = 5040$
  - $10! = 3628800$
  - $25! \approx 10^{25}$
- Il faut donc **déterminer une méthode de calcul efficace** permettant de traiter des problèmes concrets.

## Linéarité du problème dans le formalisme de l'AR

- Se pose maintenant la question d'une méthode de calcul permettant de déterminer la solution issue de la règle majoritaire globale sous contraintes.
- J.F. Marcotorchino et P. Michaud (1979) ont déterminé une méthode permettant de faire ce calcul. Ils sont arrivés à résoudre de manière exacte des problèmes allant jusqu'à une centaine d'alternatives.
- Ils ont montré que :
  - 1 la règle majoritaire globale sous contrainte pouvait s'exprimer en utilisant des matrices relationnelles individuelles et collective. Dans ce cas, la règle se traduit par la **maximisation d'une fonction linéaire**. Cette fonction est appelé **critère de Condorcet** en AR.
  - 2 les **propriétés relationnelles** définissant le type de relation de préférence pouvait également s'exprimer en utilisant des matrices relationnelles. Dans ce cas, ces propriétés pouvaient s'exprimer telles des **contraintes linéaires**.

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians
  - Introduction et notations
  - Choix d'une bonne règle pour la décision collective et AR
  - Méthode de calcul dans le cadre de l'AR
  - Cas et propriétés particuliers
  - Cas général

## Linéarité du problème dans le formalisme de l'AR

- 1 Le **critère de Condorcet** dans le cadre de l'agrégation des préférences s'écrit de la manière suivante :

$$V(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \sum_{(a,b) \in X} c_{ab} = \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} c_{ab} x_{ab}$$

C'est donc une fonction linéaire par rapport à la matrice relationnelle inconnue  $\mathbf{X}$

- 2  $\mathbf{X}$  est la matrice relationnelle d'une relation d'ordre total. Les propriétés de ce type de relations de préférence s'expriment de la manière suivante :

Propriété	Définition logique	Contrainte linéaire
Réflexivité	$\forall a (aRa)$	$\forall a (\mathbf{X}_{aa} = 1)$
Antisymétrie	$\forall a, b ((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$	$\forall a \neq b (\mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} \leq 1)$
Complète	$\forall a \neq b (aRb \vee bRa)$	$\forall a \neq b (\mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} \geq 1)$
Transitivité	$\forall a, b, c ((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$	$\forall a, b (\mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1)$

## Programme linéaire binaire

- Dans le cadre de l'AR, le problème de l'agrégation de relations de préférence afin d'obtenir une relation collective qui soit un ordre total est modélisé par un **programme linéaire binaire** :

$$\text{maximiser : } V(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} \mathbf{C}_{ab} \mathbf{X}_{ab}$$

$$\text{s.l.c : } \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & (\text{Réflexivité}) \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} = 1 & \forall a \neq b & (\text{Antisymétrie, Complète}) \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & (\text{Transitivité}) \end{cases}$$

$$\text{avec : } \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} \quad \forall a, b \quad (\text{Binarité})$$

- On peut donc utiliser des **solveurs de PL en nombres entiers** (GLPK (open source), CPLEX (Ilog/IBM),...) pour résoudre le problème

## Notations de l'AR

- Dans la suite du cours, nous utiliserons les notations suivantes :

Notation	Définition
$\mathbb{A}$	Ensemble des alternatives ou candidats
$n$	Cardinal de $\mathbb{A}$
$\mathbb{C}$	Ensemble des attributs ou votants ou critères
$m$	Cardinal de $\mathbb{C}$
$R^k$	Relation de préférence sous-jacente à $k \in \mathbb{C}$
$\mathbf{R}^k$	Matrice relationnelle de $R^k$
$\overline{R}^k$	Relation complémentaire <sup>4</sup> de $R^k$
$\overline{\mathbf{R}}^k$	Matrice relationnelle de $\overline{R}^k$ : $\overline{\mathbf{R}}_{ab}^k = 1 - \mathbf{R}_{ab}^k$
$\mathbf{C}$	Matrice relationnelle collective $\mathbf{C} = \sum_k \mathbf{R}^k$
$\overline{\mathbf{C}}$	Matrice relationnelle collective $\overline{\mathbf{C}} = \sum_k \overline{\mathbf{R}}^k$
$X$	Relation binaire représentant la décision collective
$\mathbf{X}$	Matrice relationnelle de $X$

4.  $\forall a, b \in \mathbb{A} : a\overline{R}b \Leftrightarrow \neg(aRb)$

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians
  - Introduction et notations
  - Choix d'une bonne règle pour la décision collective et AR
  - Méthode de calcul dans le cadre de l'AR
  - Cas et propriétés particuliers
  - Cas général

## Agrégation de relations d'ordre total

- Le cas d'école c'est lorsque le problème consiste à agréger  $m$  préférences qui sont **toutes des relations d'ordre total** et de déterminer une relation d'ordre total collective.
- Dans ce cas on a les propriétés suivantes :
  - Les matrices relationnelles  $\mathbf{R}^k$  vérifient toutes les contraintes linéaires (réflexivité, antisymétrie, complète, transitive),  $\forall k$  :
    - $\forall a : \mathbf{R}_{aa}^k = 1$
    - $\forall a, b : \mathbf{R}_{ab}^k + \mathbf{R}_{ba}^k = 1$
    - $\forall a, b, c : \mathbf{R}_{ab}^k + \mathbf{R}_{bc}^k - \mathbf{R}_{ac}^k \leq 1$
  - $\forall a : \mathbf{C}_{aa} = m$
  - $\forall a, b : \mathbf{C}_{ab} + \mathbf{C}_{ba} = m$
  - $\forall a, b, c : \mathbf{C}_{ab} + \mathbf{C}_{bc} - \mathbf{C}_{ac} \leq m$



## Agrégation de relations d'ordre total (suite)

- Si la relation collective recherchée est contrainte à être une relation d'ordre total (RMGC) alors nous avons la propriété suivante :

$$\max \underbrace{\sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} \mathbf{C}_{ab} \mathbf{X}_{ab}}_{V(\mathbf{C}, \mathbf{X})} \Leftrightarrow \max \underbrace{\sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} \bar{\mathbf{C}}_{ab} \bar{\mathbf{X}}_{ab}}_{V(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{X}})}$$

## Démonstration.

$$\begin{aligned} \max \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} \bar{\mathbf{C}}_{ab} \bar{\mathbf{X}}_{ab} &\Leftrightarrow \max \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (m - \mathbf{C}_{ab})(1 - \mathbf{X}_{ab}) \\ &\Leftrightarrow \max \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{C}_{ab} \mathbf{X}_{ab} + m - m \mathbf{X}_{ab} - \mathbf{C}_{ab}) \\ &\Leftrightarrow \max \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} \mathbf{C}_{ab} \mathbf{X}_{ab} \\ &\quad + mn^2 - m \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} \mathbf{C}_{ab} \\ &\Leftrightarrow \max \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} \mathbf{C}_{ab} \mathbf{X}_{ab} \end{aligned}$$

□

## Exemple (Relations d'ordre totale et majorité absolue)

Voitures	prix (euros)	conso. (l/100 km)	niv. poll.	niv. confort
a	10k	6.5	A	Mauvaise
b	20k	7.6	B	Bonne
c	25k	7.5	C	Moyenne
d	30k	8.2	D	Très bonne

- Chaque variable induit une relation d'ordre totale. On obtient :

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ et } \left( \mathbf{C} - \underbrace{\frac{m}{2}}_{=2} \mathbf{1} \right) = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- On peut voir que la solution optimale  $\mathbf{X}^* = a \succeq b \succeq c \succeq d$  vérifie la propriété de la majorité absolue ( $V(\mathbf{C}, \mathbf{X}^*) = 34 \geq \frac{40}{2}$ ).

## Agrégation de relations d'ordre total (suite)

- Dans le cas de l'agrégation de relations d'ordre total, le critère de Condorcet peut donc également se formaliser de la manière suivante :

$$\Delta(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{C}_{ab} \mathbf{X}_{ab} + \bar{\mathbf{C}}_{ab} \bar{\mathbf{X}}_{ab})$$

- On a  $\max V(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \Leftrightarrow \max V(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{X}})$  et donc  $\max V(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \Leftrightarrow \max \Delta(\mathbf{C}, \mathbf{X})$ .

- Or nous avons :

$$\Delta(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} \left[ \left( \mathbf{C}_{ab} - \frac{m}{2} \right) \mathbf{X}_{ab} + \bar{\mathbf{C}}_{ab} \right]$$

- Ainsi  $\max V(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \Leftrightarrow \max \Delta(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \Leftrightarrow \max \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} \left( \mathbf{C}_{ab} - \frac{m}{2} \right) \mathbf{X}_{ab}$ .
- Dans le cas des ordres totaux, le critère de Condorcet vérifie la propriété de la **majorité absolue** (par paire et globale).

## La règle de Kemeny (1959)

- Le critère de Kemeny est de **nature métrique** en comparaison du critère de Condorcet qui est plutôt de nature logique.
- Étant donné  $m$  attributs (votants) proposant des classements de  $n$  alternatives (candidats), on détermine les matrices relationnelles de chaque attribut notées  $\mathbf{R}^k$ .
- On définit la **distance entre deux relations d'ordre**  $\mathbf{R}^k$  et  $\mathbf{X}$  de la manière suivante :

$$d(\mathbf{R}^k, \mathbf{X}) = \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2: a \neq b} |\mathbf{R}_{ab}^k - \mathbf{X}_{ab}|$$

- La **règle de Kemeny** consiste alors à résoudre le problème (on parle également du problème de l'**ordre médian**) suivant :

$$\begin{aligned} \text{minimiser : } & \text{Kem}(\{\mathbf{R}^k\}_k, \mathbf{X}) = \sum_{k \in \mathbb{C}} d(\mathbf{R}^k, \mathbf{X}) \\ \text{s.l.c : } & \mathbf{X} \text{ est une relation d'ordre total} \end{aligned}$$

## La règle de Kemeny (1959) (suite)

- Dans le cadre des relations d'ordre total, la **minimisation du critère de Kemeny**,  $Kem(\{\mathbf{R}^k\}_k, \mathbf{X}) = \sum_{k \in \mathbb{C}} d(\mathbf{R}^k, \mathbf{X})$ , est **équivalente à la maximisation du critère de Condorcet**.

### Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \min Kem(\{\mathbf{R}^k\}_k, \mathbf{X}) &\Leftrightarrow \min \sum_k d(\mathbf{R}^k, \mathbf{X}) \\
 &\Leftrightarrow \min \sum_k \sum_{a \neq b} |\mathbf{R}_{ab}^k - \mathbf{X}_{ab}| \\
 &\Leftrightarrow \min \sum_k \sum_{a \neq b} (\mathbf{R}_{ab}^k - \mathbf{X}_{ab})^2 \\
 &\Leftrightarrow \min \sum_k \sum_{a \neq b} ((\mathbf{R}_{ab}^k)^2 + (\mathbf{X}_{ab})^2 - 2\mathbf{R}_{ab}^k \mathbf{X}_{ab}) \\
 &\Leftrightarrow \min \sum_k \sum_{a \neq b} (\mathbf{R}_{ab}^k + \mathbf{X}_{ab} - 2\mathbf{R}_{ab}^k \mathbf{X}_{ab}) \\
 &\Leftrightarrow \min \sum_{a \neq b} (\mathbf{C}_{ab} + m\mathbf{X}_{ab} - 2\mathbf{C}_{ab} \mathbf{X}_{ab}) \\
 &\Leftrightarrow \min -2 \sum_{a \neq b} \mathbf{C}_{ab} \mathbf{X}_{ab} + \sum_{a \neq b} \mathbf{C}_{ab} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &\Leftrightarrow \max \sum_{a \neq b} \mathbf{C}_{ab} \mathbf{X}_{ab} \\
 &\Leftrightarrow \max V(\mathbf{C}, \mathbf{X})
 \end{aligned}$$

□

## La règle de Kendall (1948)

- Le critère de Kendall est de **nature statistique** en comparaison des critères de Condorcet et de Kemeny.
- Soient  $m$  variables numériques  $V^k$  dont les valeurs sont mesurées pour  $n$  individus. On a les définitions suivantes en statistiques non paramétriques :
  - Une paire  $a \neq b$  est dite **concordante** pour  $V^k$  et  $V^l$  si :  $(V_a^k < V_b^k) \wedge (V_a^l < V_b^l)$  ou  $(V_a^k > V_b^k) \wedge (V_a^l > V_b^l)$
  - Une paire  $a \neq b$  est dite **discordante** pour  $V^k$  et  $V^l$  si :  $(V_a^k < V_b^k) \wedge (V_a^l > V_b^l)$  ou  $(V_a^k > V_b^k) \wedge (V_a^l < V_b^l)$
- On définit alors le **tau de Kendall** entre deux variables  $V^k$  et  $V^l$  de la manière suivante :

$$\tau(V^k, V^l) = \frac{\text{Nb de paires concordantes} - \text{Nb de paires discordantes}}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

## La règle de Kemeny (1959) (suite)

- Kemeny n'avait pas non plus proposé de méthode de calcul pour la détermination de la relation d'ordre total collective mais s'est davantage intéressé à l'étude de la mesure  $Kem(\mathbf{C}, \mathbf{S})$ .
- On peut en fait traiter le problème dans le cadre de l'AR. Ainsi, la règle de Kemeny peut être modélisée par programmation linéaire binaire :

minimiser :  $Kem(\{\mathbf{R}^k\}_k, \mathbf{X})$

$$\text{s.l.c : } \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & (\text{Réflexivité}) \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} = 1 & \forall a \neq b & (\text{Antisymétrie, Complète}) \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & (\text{Transitivité}) \end{cases}$$

avec :  $\mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} \quad \forall a, b$  (Binarité)

- Dans le cas de l'agrégation de relations d'ordre total, ce problème est équivalent à la RMGC.

## La règle de Kendall (1948) (suite)

- La **règle de Kendall** consiste alors à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{maximiser : } &Kend(\{V^k\}_k, \mathbf{X}) = \frac{1}{m} \sum_{k \in \mathbb{C}} \tau(V^k, \mathbf{X}) \\
 \text{s.l.c : } &\mathbf{X} \text{ est une relation d'ordre total}
 \end{aligned}$$

- On peut représenter le problème dans le formalisme relationnel. Considérons les matrices relationnelles codant les relations d'ordre sous-jacentes aux variables  $V^k$ . Notons les  $\mathbf{V}^k$ .
- Nous avons la propriété suivante pour deux variables  $V^k$  et  $V^l$  :

Nb de paires concordantes – Nb de paires discordantes

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{V}_{ab}^k - \mathbf{V}_{ba}^k) \mathbf{V}_{ab}^l
 \end{aligned}$$

Exemple ( $\tau$  de Kendall et matrices relationnelles)

Voitures	prix	conso.	poll.	confort
a	10k	6.5	A	Mauvaise
b	20k	7.6	B	Bonne
c	25k	7.5	C	Moyenne
d	30k	8.2	D	Très bonne

- Prenons  $V^1 = \text{prix}$  et  $V^2 = \text{consommation}$ . On a  $\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2$  et  $\mathbf{V}^1 - \mathbf{V}^2$  qui valent respectivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- On obtient  $\sum_{(a,b)} (\mathbf{V}_{ab}^1 - \mathbf{V}_{ba}^1) \mathbf{V}_{ab}^2 = 4$  et  $\tau(V^1, V^2) = 2/3$ .

5. Dans ce cas l'ordre total est au sens de la relation  $\leq$  et non  $\succeq$

## La règle de Kendall (1959) (suite)

- Comme pour Kemeny, Kendall n'a pas proposé une méthode de calcul pour la détermination de la relation d'ordre total collective.
- On peut en fait traiter le problème dans le cadre de l'AR. Ainsi, la règle de Kendall peut être modélisée par programmation linéaire binaire :

maximiser :  $Kend(\{V^k\}_k, X)$

$$\text{s.l.c. : } \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & (\text{Réflexivité}) \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} = 1 & \forall a \neq b & (\text{Antisymétrie, Complète}) \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & (\text{Transitivité}) \end{cases}$$

avec :  $\mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} \quad \forall a, b$  (Binarité)

- Dans le cas de l'agrégation de relations d'ordre total, ce problème est équivalent à la RMGC.

## La règle de Kendall (1948)

- Dans le cadre des relations d'ordre total, la maximisation du critère de Kendall,  $Kend(\{V^k\}_k, X) = \frac{1}{m} \sum_{k \in \mathbb{C}} \tau(V^k, X)$ , est équivalente à la maximisation du critère de Condorcet.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \max Kend(\{V^k\}_k, X) &\Leftrightarrow \max \frac{1}{m} \sum_k \tau(V^k, X) \\ &\Leftrightarrow \max \frac{2}{mn(n-1)} \sum_k \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{V}_{ab}^k - \mathbf{V}_{ba}^k) \mathbf{X}_{ab} \\ &\Leftrightarrow \max \frac{2}{mn(n-1)} \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\sum_k \mathbf{V}_{ab}^k - \sum_k \mathbf{V}_{ba}^k) \mathbf{X}_{ab} \\ &\Leftrightarrow \max \frac{2}{mn(n-1)} \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{C}_{ab} - \mathbf{C}_{ba}) \mathbf{X}_{ab} \\ &\Leftrightarrow \max \frac{2}{mn(n-1)} \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{C}_{ab} - m + \mathbf{C}_{ab}) \mathbf{X}_{ab} \\ &\Leftrightarrow \max \frac{2}{mn(n-1)} \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (2\mathbf{C}_{ab} - m) \mathbf{X}_{ab} \\ &\Leftrightarrow \max \frac{4}{mn(n-1)} \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{C}_{ab} - \frac{m}{2}) \mathbf{X}_{ab} \\ &\Leftrightarrow \max \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{C}_{ab} - \frac{m}{2}) \mathbf{X}_{ab} \\ &\Leftrightarrow \max V(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \end{aligned}$$

□

## Rappel du Sommaire

- 1 Représentation des préférences
- 2 Opérateurs d'agrégation
- 3 Méthodes de vote et théorie du choix social
- 4 Analyse Relationnelle et ordres médians
  - Introduction et notations
  - Choix d'une bonne règle pour la décision collective et AR
  - Méthode de calcul dans le cadre de l'AR
  - Cas et propriétés particuliers
  - Cas général

## Flexibilité du modèle de l'AR

- Nous avons supposé jusqu'à présent que les relations de préférences individuelles étaient toutes des ordres totaux et que la relation collective recherchée devait être aussi une relation d'ordre total.
- **Dans le cadre de l'AR, nous pouvons traiter des problèmes beaucoup plus divers :**
  - 1 Il est possible d'agréger plusieurs types de relations de préférences individuelles et de rechercher une relation d'ordre total comme type de préférence collective.
  - 2 Supposons que nous avons deux matrices relationnelles collectives  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ .  $\mathbf{C}_{ab}$  représente une valeur positive reflétant le support collectif de la relation  $a \succeq b$ .  $\mathbf{D}_{ab}$ , au contraire, représente une valeur positive reflétant le support collectif de la non relation  $a \not\succeq b$ . Dans ce cas, la **généralisation du critère de Condorcet** suivante pourra être considérée :

$$\Delta(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X}) = \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{C}_{ab} - \mathbf{D}_{ab}) \mathbf{X}_{ab}$$

## Relations binaires sur un ensemble $\mathbb{A}$ (rappel)

### Définition. (Relations binaires sur un ensemble $\mathbb{A}$ )

Soit  $\mathbb{A}$  un ensemble fini d'éléments  $\{a, b, c, \dots\}$  avec  $|\mathbb{A}| = n$ . Une relation binaire  $R$  sur  $\mathbb{A}$  est un sous-ensemble du produit cartésien  $R \subset \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ , c'est-à-dire un ensemble de paires ordonnées  $(a, b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ . Si nous avons  $(a, b) \in R$ , ce que l'on notera par  $aRb$  alors on dit que l'élément  $a$  est en relation avec l'élément  $b$  pour la relation  $R$ .

## Flexibilité du modèle de l'AR (suite)

- 3 Il est alors possible de chercher d'autres types de relation de préférence pour le choix collectif. En particulier, le modèle correspondant à la recherche d'un **préordre complet** est le suivant :

$$\text{maximiser : } \Delta(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X}) = \sum_{(a,b) \in \mathbb{A}^2} (\mathbf{C}_{ab} - \mathbf{D}_{ab}) \mathbf{X}_{ab}$$

$$\text{s.l.c : } \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & \text{(Réflexivité)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} \geq 1 & \forall a \neq b & \text{(Complète)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & \text{(Transitivité)} \end{cases}$$

$$\text{avec : } \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} \quad \forall a, b \quad \text{(Binarité)}$$

- 4 Si la relation recherchée ne doit pas nécessairement être complète il suffit de retirer la contrainte linéaire correspondante du programme linéaire. On traite alors également les **ordres partiels**.

## Propriétés des relations binaires (rappel)

Une relation binaire  $R$  est dite :

- 1 Réflexive :  $\forall a (aRa)$
- 2 Irréflexive :  $\forall a (a\bar{R}a)$
- 3 Symétrique :  $\forall a, b (aRb \Rightarrow bRa)$
- 4 Asymétrique :  $\forall a, b (aRb \Rightarrow b\bar{R}a)$
- 5 Antisymétrique :  $\forall a, b ((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$   
Ce qui est équivalent à :  $\forall a, b ((a \neq b) \Rightarrow (a\bar{R}b \vee b\bar{R}a))$
- 6 Complète :  $\forall a \neq b (aRb \vee bRa)$
- 7 Transitive :  $\forall a, b, c ((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$

## Représentation matricielle d'une relation binaire

Une relation binaire  $R$  sur  $\mathbb{A}$  peut être représentée par une matrice carrée de dimension  $|\mathbb{A}|$ , notée  $\mathbf{R}$ . Son terme général est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } aRb \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cadre de l'AR, on appelle ces matrices : **matrices relationnelles**

## Relation d'ordre total (ou complet)

### Définition.

$R$  est une **relation d'ordre total** ssi :

- $R$  est complète
- $R$  est transitive
- $R$  est antisymétrique

## Propriétés matricielles des relations binaires

Soit  $\mathbf{R}$  la représentation matricielle de la relation binaire  $R$ .

- une relation binaire réflexive est telle que  $\forall a : \mathbf{R}_{aa} = 1$  (1 partout sur la diagonale)
- une relation binaire irreflexive est telle que  $\forall a : \mathbf{R}_{aa} = 0$  (0 partout sur la diagonale)
- une relation binaire symétrique est telle que  $\forall a, b : \mathbf{R}_{ab} = \mathbf{R}_{ba}$  (matrice symétrique)
- la matrice de la relation inverse  $\check{R}$  est telle que  $\check{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{R}_{ba}$  (matrice transposée de  $\mathbf{R}$ )

## Exemple d'une relation d'ordre total (ou complet)

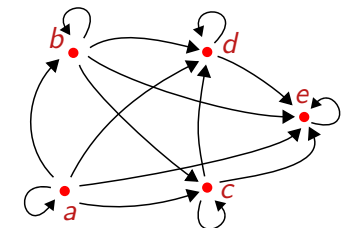
Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$ .

Représentation matricielle :

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :



## Relation de préordre total (ou complet)

### Définition.

$R$  est une **relation de préordre total** ssi :

- $R$  est complète
- $R$  est transitive

## Exemple d'une relation de préordre total (ou complet)

Soit  $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$  et soit

$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}$ .

Représentation matricielle :

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Représentation graphique :

